

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ



ИНСТИТУТ СТРАТЕГИИ
РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ

федеральное государственное
бюджетное научное учреждение

МАТЕМАТИКА

(углубленный уровень)

Реализация требований ФГОС
среднего общего образования

Методическое пособие для учителя

Москва

2023

УДК 373.167.1:51
ББК 74.262.21
М34

Авторский коллектив:

Л. О. Рослова, кандидат педагогических наук, зав. лабораторией математического общего образования ФГБНУ «Институт стратегии развития образования»

Е. Е. Алексеева, кандидат педагогических наук, старший научный сотрудник лаборатории математического общего образования ФГБНУ «Институт стратегии развития образования»

Е. В. Буцко, научный сотрудник лаборатории математического общего образования ФГБНУ «Институт стратегии развития образования»

Под редакцией:

Л. О. Рословой

Рецензенты:

И. М. Осмоловская, доктор педагогических наук

О. А. Рыдзе, кандидат педагогических наук

М34

Математика (углубленный уровень). Реализация требований ФГОС среднего общего образования : методическое пособие для учителя / [Л. О. Рослова, Е. Е. Алексеева, Е. В. Буцко]; под ред. Л. О. Рословой. – М.: ФГБНУ «Институт стратегии развития образования», 2023. – 92 с. : ил.

ISBN 978-5-6049295-7-5

В методическом пособии отражены основные нововведения, связанные с принятием обновленных ФГОС СОО в части изучения математики на углубленном уровне. Методические материалы включают характеристику основных изменений ФГОС СОО и особенностей федеральной рабочей программы по математике углубленного уровня, рекомендации по организации преподавания математики в 10–11 классах на углубленном уровне с учетом нововведений. Предложены варианты контрольных работ, предназначенных для проведения внутришкольного мониторинга достижений обучающихся за 10 класс, соответствующих планируемому результату обучения, представленным в федеральной рабочей программе.

Материалы представляют интерес для широкого круга специалистов в области математического образования: учителей, преподавателей педагогических вузов, методистов системы повышения квалификации учителей, разработчиков материалов для оценки качества образования.

Методическое пособие разработано в рамках государственного задания ФГБНУ «Институт стратегии развития образования» на 2023 год «Обновление содержания общего образования».

УДК 373.167.1:51
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-6049295-7-5

© ФГБНУ «Институт стратегии развития образования», 2023
Все права защищены

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ 1. РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ УЧЕБНОМУ ПРЕДМЕТУ «МАТЕМАТИКА» НА УГЛУБЛЕННОМ УРОВНЕ В 10–11 КЛАССАХ	5
1.1. Ключевые изменения федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования в части обучения математике	5
1.1.1. Требования ФГОС СОО к результатам обучения математике на углубленном уровне в 10–11 классах	5
1.1.2. Особенности федеральной рабочей программы по учебному предмету «Математика» углубленного уровня	8
1.1.3. Особенности планируемых результатов обучения математике в 10–11 классах на углубленном уровне	11
1.2. Оценивание результатов обучения математике на углубленном уровне в 10–11 классах....	16
1.2.1. Предметные результаты освоения программы учебного предмета «Математика». 10 класс	16
1.2.2. Пример итоговой контрольной работы по курсу алгебры и начал математического анализа. 10 класс	22
1.2.2.1. Спецификация контрольно-измерительных материалов для оценки достижения планируемых результатов обучения по алгебре и началам математического анализа в 10 классе на углубленном уровне	22
1.2.2.2. Итоговая контрольная работа по курсу «Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень». 10 класс	28
1.2.3. Пример итоговой контрольной работы по курсу геометрии. 10 класс	34
1.2.3.1. Спецификация контрольно-измерительных материалов для оценки достижения планируемых результатов обучения по геометрии в 10 классе на углубленном уровне	34
1.2.3.2. Итоговая контрольная работа по курсу «Геометрия. Углубленный уровень». 10 класс	37
РАЗДЕЛ 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ УЧЕБНОГО ПРЕДМЕТА «МАТЕМАТИКА» НА УГЛУБЛЕННОМ УРОВНЕ В 10–11 КЛАССАХ.....	42
2.1. Методические рекомендации по организации обучения математике в цифровой образовательной среде	42
2.1.1. Инициативы, определяющие создание цифровой образовательной среды.....	42
2.1.2. Цифровые образовательные ресурсы и платформы для организации обучения математике	43
2.1.3. Виртуальная математическая лаборатория как метод организации обучения математике в цифровой образовательной среде.....	50

2.2. Лабораторно-практические работы – электронный образовательный ресурс для работы в виртуальной математической лаборатории	60
2.2.1. Дидактическая цель системы лабораторно-практических работ	60
2.2.2. Планируемые результаты выполнения интерактивных лабораторно-практических работ.....	63
2.2.3. Общие методические рекомендации по организации работы со структурными блоками интерактивных лабораторно-практических работ	66
2.3. Особенности преподавания учебного курса «Вероятность и статистика»	78
Литература для учителя.....	87

РАЗДЕЛ 1. РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ УЧЕБНОМУ ПРЕДМЕТУ «МАТЕМАТИКА» НА УГЛУБЛЕННОМ УРОВНЕ В 10–11 КЛАССАХ

1.1. Ключевые изменения федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования в части обучения математике

1.1.1. Требования ФГОС СОО к результатам обучения математике на углубленном уровне в 10–11 классах

В связи с принятием обновленного федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования (приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 12.08.2022 № 732 «О внесении изменений в федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования, утвержденный приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 мая 2012 г. № 413») (далее – ФГОС СОО, Стандарт) в содержании математического образования в 10–11 классах произошли изменения, направленные на реализацию Концепции развития математического образования в Российской Федерации (2013) и выполнение поручения Президента Российской Федерации «обеспечить совершенствование преподавания учебных предметов «математика» и «информатика» в общеобразовательных организациях, установив их приоритет в учебном плане и скорректировав содержание примерных основных образовательных программ общего образования» (декабрь 2020 г.).

Прежде всего следует отметить, что в новой редакции Стандарта были конкретизированы и структурированы личностные, метапредметные, предметные результаты обучения. Это общее изменение, касающееся всех учебных предметов, в том числе и математики, важно с той точки зрения, что концептуальные основания Стандарта остались прежними, и он продолжает свое развитие в той же парадигме, однако с учетом изменений, происходящих в науке, обществе и государстве.

В обновленном Стандарте предметные результаты освоения основной образовательной программы для учебных предметов на углубленном уровне ориентированы преимущественно на подготовку к последующему профессиональному образованию, развитие индивидуальных способностей обучающихся путем более глубокого, чем это предусматривается базовым курсом, освоения основ наук, систематических знаний и способов действий, присущих данному учебному предмету. Согласно этому положению определяется ориентация углубленного курса математики на интересы, потребности

и возможности тех обучающихся, кто будет использовать математику в профессии, прежде всего инженерных, технологических, IT и прочих направлений. Напомним, что традиционная программа углубленного изучения математики была ориентирована на тех обучающихся, кто планировал связать свою будущую профессиональную деятельность с математикой. Важно, что потребности будущих математиков могут быть успешно реализованы за счет «надстраивания» общего курса дополнительным содержанием обучения, модулями, курсами внеурочной деятельности, кружками, летними/зимними школами, в том числе по олимпиадной математике.

Предметные результаты, как и в предыдущей версии Стандарта, описаны с использованием единой терминологии «оперировать понятием/свободно оперировать понятием», что позволяет соблюдать преемственность в развитии программ базового и углубленного уровней, математических курсов, математического развития обучающихся. При этом в новой редакции по углубленному курсу представлены не только требования, дополняющие и расширяющие требования по базовому курсу: «требования к предметным результатам освоения углубленного курса математики должны включать требования к результатам освоения базового курса и дополнительно отражать:...», они представлены в полном объеме, что значительно упрощает их понимание и работу с ними.

Следующим важным моментом является новое представление структуры учебного предмета «Математика» для обучающихся 10–11 классов, которую, как и в 7–9 классах, образовали три изучаемых параллельно учебных курса: «Алгебра и начала математического анализа», «Геометрия», «Вероятность и статистика». Основное содержание учебного курса «Вероятность и статистика» ранее было представлено в курсе алгебры.

Основными линиями содержания этого курса стали вероятность, статистика, комбинаторика, графы, логика, множества. Данный курс имеет не только теоретический, но прикладной и практический характер, в содержание обучения включены практические работы, а виды деятельности – математические эксперименты.

Раскрытие идей Стандарта осуществляется в таких нормативных и методических документах, как федеральная образовательная программа среднего общего образования и федеральная рабочая программа по учебному предмету «Математика».

В федеральной образовательной программе представлен учебный план, согласно которому на изучение математики в 10–11 классах на углубленном уровне должно отводиться не менее 8 ч в неделю в течение каждого года обучения, из них на курс «Алгебра и начала математического анализа» – 4 ч, курс «Геометрия» – 3 ч, курс «Вероятность и статистики» – 1 ч.

Ниже приводятся фрагменты примеров учебных планов для двух профилей, где математика изучается на углубленном уровне, – инженерного и информационно-технологического.

Таблица 1

Пример учебного плана для технологического (инженерного) профиля
(с углубленным изучением математики и физики) (вариант 1)

Математика и информатика	Алгебра и начала математического анализа	У	4	4	4	4
	Геометрия	У	3	3	3	3
	Вероятность и статистика	У	1	1	1	1

Таблица 2

Пример учебного плана для технологического (информационно-технологического) профиля (с углубленным изучением математики и информатики) (вариант 2)

Математика и информатика	Алгебра и начала математического анализа	У	4	4	4	4
	Геометрия	У	3	3	3	3
	Вероятность и статистика	У	1	1	1	1

Отметим, что, как и ранее, возможно увеличение числа учебных часов на любой из данных курсов. Например, если в действующем учебном плане образовательной организации на изучение алгебры и начал анализа отводится 6 ч, то в новом плане, с учетом выделения вероятностно-статистического материала в отдельный курс, можно добавить на курс алгебры 1 ч.

Федеральная рабочая программа содержит результаты обучения, содержание обучения и тематическое планирование, распределенные по годам обучения. В тематическом планировании дано примерное распределение учебного времени и описаны основные виды деятельности обучающихся, обеспечивающие достижение планируемых результатов обучения.

1.1.2. Особенности федеральной рабочей программы по учебному предмету «Математика» углубленного уровня

Выделим четыре основных момента, связанных с федеральной рабочей программой углубленного уровня.

Структура федеральной рабочей программы учебного предмета «Математика» на углубленном уровне отвечает общей структуре федеральных рабочих программ. В нее входят:

Пояснительная записка, включающая:

- общую характеристику учебного предмета «Математика»;
- цели и особенности изучения учебного предмета «Математика»;
- место учебного предмета «Математика» в учебном плане.

Планируемые результаты освоения учебного предмета «Математика» на углубленном уровне:

- личностные результаты;
- метапредметные результаты.

Программы курсов (3 программы), включающие:

- цели изучения учебного курса;
- место учебного курса в учебном плане;
- предметные результаты освоения федеральной рабочей программы (по годам обучения);
- содержание учебного курса (по годам обучения);
- тематическое планирование учебного курса (по годам обучения).

Личностные и метапредметные результаты освоения учебного предмета «Математика» представлены по предмету в целом, при этом даны они в соответствии с единой принятой структурой, но конкретизированы именно с учетом специфики математики и ее изучения на уровне среднего общего образования на углубленном уровне.

В тематическом планировании, как и принято, дается распределение содержания по темам с указанием рекомендуемых часов на их изучение. Содержание представлено крупными тематическими блоками, чтобы авторы программ и учебников, учителя, составляющие свои авторские программы, могли вписаться в эти рамки и найти структурирование, адекватное отработанным и зарекомендовавшим себя в практике обучения методическим подходам и принципам. В федеральной рабочей программе отмечено, что автор рабочей программы вправе увеличить или уменьшить предложенное число учебных часов

на тему, чтобы углубиться в тематику, более заинтересовавшую учеников, или направить усилия на преодоление затруднений, что допустимо также локальное перераспределение и перестановка элементов содержания внутри данного класса».

Принципиальная позиция разработчиков федеральной программы заключается в том, что контроль не фиксируется в программе, количество проверочных работ (тематический и итоговый контроль качества усвоения учебного материала) и их тип (самостоятельные и контрольные работы, тесты) остаются на усмотрение учителя. Также учитель вправе увеличить или уменьшить число учебных часов, отведенных на обобщение, повторение, систематизацию знаний обучающихся.

Подчеркнуто, что «единственной целью и критерием является достижение планируемых результатов обучения, указанных в программе».

Для обеспечения процесса формирования предметных и метапредметных результатов обучения в тематическом планировании представлены соответствующие виды деятельности, направленные на формирование прочных предметных навыков и метапредметных навыков. Специфика углубленного курса проявляется в интеллектуализации видов деятельности (выбирать, предлагать и обсуждать алгоритмы, способы решения задачи), в увеличении доли заданий исследовательского характера, в усилении теоретической составляющей (работа с теорией) и логической компоненты.

Необходимость использования цифровых ресурсов также отражена в видах деятельности в тех темах, где это целесообразно, подчеркивается потенциал цифровых ресурсов, прежде всего, для развития исследовательских умений обучающихся, осваивающих программу углубленного уровня.

В видах деятельности отражается продолжение формирования функциональной математической грамотности, во многих темах обучающимся предлагается применять математические знания для решения задач из других предметов, а также в реальных жизненных ситуациях. Надо стремиться к тому, чтобы для обучающихся, осваивающих математику на углубленном уровне, было характерно умение исследовать и моделировать сложные проблемы, разбираться с нетипичными контекстами, работать с разными источниками и информацией, представленной в различных формах, создавать новые стратегии для решения проблем, проявлять интуицию, рассуждать, использовать для моделирования формальный язык математики.

С введением углубленного обучения на уровне основного общего образования становится актуальной реализация преемственности обучения. С точки зрения преемственности важно выстроить систему обучения на углубленному уровню на единых основаниях и сохранить все важнейшие принципы, на которых успешно развивалась данная система на протяжении нескольких десятилетий. Напомним, что принципы успешной работы математических классов были сформулированы одним из их создателей – Н. Н. Константиновым, и сегодня они применимы как для основного общего, так и для среднего общего образования.

- *Тщательность*: означает, что тема проходит тщательно, законченным по смыслу фрагментом, что не исключает последующего возврата к теме на новом, более высоком, содержательном уровне.

«Ученик, который один раз чего-то недопонял, другой раз чего-то недопонял, засоряет, наконец, свою учебу до того, что ему становится противно в ней жить» (Н. Н. Константинов).

- *Неторопливость*: означает, что на каждую трудность учитель тратит столько времени, сколько нужно.

«Не беда, если пройдено мало. А беда начинается тогда, когда нужно что-то «пройти» к определенному сроку» (Н. Н. Константинов).

- *Самостоятельность*: означает, что значительная часть теоретического материала осваивается обучающимися самостоятельно – они сами обосновывают большую часть предлагаемых для изучения фактов и утверждений.

«Прямой рассказ учителя малоэффективен, ... основным способом подсказки учителя становится структурирование материала» (Н. Н. Константинов).

Эти принципы легли в основу концепции разработки федеральной рабочей программы по математике углубленного уровня, и для эффективности и повышения качества обучения требуется, чтобы и учитель следовал им, реализуя свою методическую систему обучения.

В заключение отметим, что реализация в образовательной практике обновленного нормативно-методического программного комплекса, который с одной стороны, базируется на традициях и достижениях математического образования, а с другой стороны, открывает новые возможности и ресурсы, может сделать углубленное обучение математике более результативным, а процесс овладения математическими знаниями более творческим.

1.1.3. Особенности планируемых результатов обучения математике в 10–11 классах на углубленном уровне

Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования (с изменениями 2022 года), сохраняя преемственность в требованиях к результатам обучения математике, имеет ряд особенностей в направлении личностного развития обучающихся, достижения метапредметных и предметных результатов обучения, что учтено при подготовке федеральной рабочей программы среднего общего образования по математике углубленного уровня.

Особенностью требований Стандарта к результатам в направлении **личностного развития обучающихся** является акцент на формировании у обучающихся гражданско-патриотических ценностей и их духовно-нравственном воспитании при изучении всех учебных курсов математики. В федеральной рабочей программе углубленного уровня результаты обучения в этом направлении конкретизированы с учетом учебного предмета «Математика». В обобщенном виде личностные результаты освоения предмета в 10–11 классах представлены в таблице 3.

Таблица 3

Личностные результаты освоения программы учебного предмета «Математика»

<i>Направление</i>	<i>Характеристика</i>
Гражданское воспитание	Сформированность гражданской позиции обучающегося как активного и ответственного члена российского общества, представлением о математических основах функционирования различных структур, явлений, процедур гражданского общества (выборы, опросы и пр.), умением взаимодействовать с социальными институтами в соответствии с их функциями и назначением
Патриотическое воспитание	Сформированность российской гражданской идентичности, уважения к прошлому и настоящему российской математики, ценностное отношение к достижениям российских математиков и российской математической школы, к использованию этих достижений в других науках, технологиях, сферах экономики

<i>Направление</i>	<i>Характеристика</i>
Духовно- нравственное воспитание	Осознание духовных ценностей российского народа; сформированность нравственного сознания, этического поведения, связанного с практическим применением достижений науки и деятельностью ученого; осознание личного вклада в построение устойчивого будущего
Эстетическое воспитание	Эстетическое отношение к миру, включая эстетику математических закономерностей, объектов, задач, решений, рассуждений; восприимчивость к математическим аспектам различных видов искусства
Экологическое воспитание	Сформированность экологической культуры, понимание влияния социально-экономических процессов на состояние природной и социальной среды, осознание глобального характера экологических проблем; ориентация на применение математических знаний для решения задач в области окружающей среды, планирование поступков и оценка их возможных последствий для окружающей среды
Ценности научного познания	Сформированность мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики, понимание математической науки как сферы человеческой деятельности, этапов ее развития и значимости для развития цивилизации; овладение языком математики и математической культурой как средством познания мира; готовность осуществлять проектную и исследовательскую деятельность индивидуально и в группе
Трудовое воспитание	Готовность к труду, осознание ценности трудолюбия; интерес к различным сферам профессиональной деятельности, связанным с математикой и ее приложениями, умение совершать осознанный выбор будущей профессии и реализовывать собственные жизненные планы; готовность и способность к математическому образованию и самообразованию на протяжении всей жизни; готовность к активному участию в решении практических задач математической направленности

<i>Направление</i>	<i>Характеристика</i>
Физическое воспитание	Сформированность умения применять математические знания в интересах здорового и безопасного образа жизни, ответственного отношения к своему здоровью (здоровое питание, сбалансированный режим занятий и отдыха, регулярная физическая активность), физического совершенствования, при занятиях спортивно-оздоровительной деятельностью

Достижение обучающимися при изучении математических курсов планируемых **метапредметных результатов**, включающих познавательные, регулятивные и коммуникативные универсальные учебные действия (УУД), отражают способность и готовность обучающихся использовать УУД для продолжения образования, самообучения, для ориентации в реальных жизненных ситуациях, решения повседневных и нетиповых задач в собственной деятельности или в сотрудничестве. В силу специфики математического содержания в первую очередь необходимо организовывать деятельность обучающихся в направлении формирования познавательных УУД, которые представлены базовыми логическими и исследовательскими действиями и действиями при работе с информацией (табл. 4).

Таблица 4

**Универсальные познавательные действия
освоения программы учебного предмета «Математика»**

<i>Базовые логические действия</i>
<ul style="list-style-type: none"> • выявлять и характеризовать существенные признаки математических объектов, понятий, отношений между понятиями; формулировать определения понятий; устанавливать существенный признак классификации, основания для обобщения и сравнения, критерии проводимого анализа; • воспринимать, формулировать и преобразовывать суждения: утвердительные и отрицательные, единичные, частные и общие; условные; • выявлять математические закономерности, взаимосвязи и противоречия в фактах, данных, наблюдениях и утверждениях; предлагать критерии для выявления закономерностей и противоречий;

- делать выводы с использованием законов логики, дедуктивных и индуктивных умозаключений, умозаключений по аналогии;
- проводить самостоятельно доказательства математических утверждений (прямые и от противного), выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры; обосновывать собственные суждения и выводы;
- выбирать способ решения учебной задачи (сравнивать несколько вариантов решения, выбирать наиболее подходящий с учетом самостоятельно выделенных критериев)

Базовые исследовательские действия

- использовать вопросы как исследовательский инструмент познания; формулировать вопросы, фиксирующие противоречие, проблему, устанавливать искомое и данное, формировать гипотезу, аргументировать свою позицию, мнение;
- проводить самостоятельно спланированный эксперимент, исследование по установлению особенностей математического объекта, явления, процесса, выявлению зависимостей между объектами, явлениями, процессами;
- самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведенного наблюдения, исследования, оценивать достоверность полученных результатов, выводов и обобщений;
- прогнозировать возможное развитие процесса, а также выдвигать предположения об его развитии в новых условиях

Действия при работе с информацией

- выявлять дефициты информации, данных, необходимых для ответа на вопрос и для решения задачи;
- выбирать информацию из источников различных типов, анализировать, систематизировать и интерпретировать информацию различных видов и форм представления;
- структурировать информацию, представлять ее в различных формах, иллюстрировать графически;
- оценивать надежность информации по самостоятельно сформулированным критериям

Одной из особенностей **предметных результатов** изучения математики является их ориентация на создание платформы математического образования, на котором в дальнейшем будет выстраиваться профессиональная подготовка обучающихся, на применение ими знаний, умений и навыков не только в учебных ситуациях, но и в широком спектре реальных жизненных условий. Для обеспечения решения этих задач предметные результаты изучения математики на углубленном уровне сконцентрированы на свободном оперировании математическими понятиями. Это означает, что у обучающихся должно быть сформировано не только знание определения понятия и его свойств, умение доказывать изучаемые свойства и признаки понятия, но и умение выявлять и характеризовать связи этого понятия с другими понятиями, использовать понятие и его свойства при проведении доказательства какого-либо факта или математического отношения, при решении задач продуктивного характера.

Достижение планируемых результатов обучения всех математических учебных курсов в направлении личностного развития обучающихся, метапредметных и предметных результатов обучения требует использования новых подходов в организации образовательного процесса, интеграции формирования функциональной математической грамотности и обновления содержания школьного курса математики. Отметим, что формирование планируемых результатов должно осуществляться в интеграции урочной и внеурочной деятельности по всем учебным курсам, включающей учебные модули, сконструированные для расширения и углубления содержания учебных курсов в целях индивидуализации обучения. Обучение всем учебным курсам учебного предмета «Математика» базируется на системно-деятельностном подходе как методологической основе Стандарта и федеральных рабочих программ, личностно-ориентированном и дифференцированном подходах. Большое значение в достижении планируемых результатов обучения математике имеет практическая деятельность обучающихся.

Таким образом, изучение учебного предмета «Математика» на углубленном уровне направлено на предоставление возможности каждому обучающемуся проявить свои интеллектуальные и творческие способности, на приобретение компетенций, необходимых для продолжения образования и дальнейшей трудовой деятельности в областях, определенных Стратегией научно-технологического развития.

1.2. Оценивание результатов обучения математике на углубленном уровне в 10–11 классах

1.2.1. Предметные результаты освоения программы учебного предмета «Математика». 10 класс

Предметные результаты освоения программы учебного предмета «Математика» за 10 класс по отдельным курсам представлены в таблице 5.

Таблица 5

Учебный курс «Алгебра и начала математического анализа»

Числа и вычисления

- свободно оперировать понятиями: рациональное число, бесконечная периодическая дробь, проценты; иррациональное число; множества рациональных и действительных чисел; модуль действительного числа;
- применять дроби и проценты для решения прикладных задач из различных отраслей знаний и реальной жизни;
- применять приближенные вычисления, правила округления, прикидку и оценку результата вычислений;
- свободно оперировать понятием: степень с целым показателем; использовать подходящую форму записи действительных чисел для решения практических задач и представления данных;
- свободно оперировать понятием: арифметический корень натуральной степени;
- свободно оперировать понятием: степень с рациональным показателем;
- свободно оперировать понятиями: логарифм числа; десятичные и натуральные логарифмы;
- свободно оперировать понятиями: синус, косинус, тангенс, котангенс числового аргумента;
- оперировать понятиями: арксинус, арккосинус и арктангенс числового аргумента.

Уравнения и неравенства

- свободно оперировать понятиями: тождество, уравнение, неравенство, равносильные уравнения и уравнения-следствия; равносильные неравенства;
- применять различные методы решения рациональных и дробно-рациональных уравнений; применять метод интервалов для решения неравенств;
- свободно оперировать понятиями: многочлен от одной переменной; многочлен с целыми коэффициентами, корни многочлена; применять деление многочлена на многочлен с остатком, теорему Безу и теорему Виета для решения задач;
- свободно оперировать понятиями: система линейных уравнений, матрица, определитель матрицы 2×2 и его геометрический смысл; использовать свойства определителя 2×2 для вычисления его значения, применять определители для решения системы линейных уравнений; моделировать реальные ситуации с помощью системы линейных уравнений, исследовать построенные модели с помощью матриц и определителей, интерпретировать полученный результат;
- использовать свойства действий с корнями для преобразования выражений;
- выполнять преобразования числовых выражений, содержащих степени с рациональным показателем;
- использовать свойства логарифмов для преобразования логарифмических выражений;
- свободно оперировать понятиями: иррациональные, показательные и логарифмические уравнения; находить их решения с помощью равносильных переходов или осуществляя проверку корней;
- применять основные тригонометрические формулы для преобразования тригонометрических выражений;
- свободно оперировать понятием: тригонометрическое уравнение; применять необходимые формулы для решения основных типов тригонометрических уравнений;
- моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять выражения, уравнения, неравенства по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

Функции и графики

- свободно оперировать понятиями: функция, способы задания функции; взаимно обратные функции, композиция функций; график функции; выполнять элементарные преобразования графиков функций;
- свободно оперировать понятиями: область определения и множество значений функции, нули функции, промежутки знакопостоянства;
- свободно оперировать понятиями: четные и нечетные функции, периодические функции, промежутки монотонности функции, максимумы и минимумы функции, наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке;
- свободно оперировать понятиями: степенная функция с натуральным и целым показателем, график степенной функции с натуральным и целым показателем; график корня n -ой степени как функции, обратной степени с натуральным показателем;
- оперировать понятиями: линейная, квадратичная и дробно-линейная функции, выполнять элементарное исследование и построение их графиков;
- свободно оперировать понятиями: показательная и логарифмическая функции, их свойства и графики; использовать их графики для решения уравнений;
- свободно оперировать понятиями: тригонометрическая окружность, определение тригонометрических функций числового аргумента;
- использовать графики функций для исследования процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами.

Начала математического анализа

- свободно оперировать понятиями: арифметическая и геометрическая прогрессия, бесконечно убывающая геометрическая прогрессия; линейный и экспоненциальный рост, формула сложных процентов; иметь представление о константе e ;
- использовать прогрессии для решения реальных задач прикладного характера;

- свободно оперировать понятиями: последовательность, способы задания последовательностей, монотонные и ограниченные последовательности; понимать основы зарождения математического анализа как анализа бесконечно малых;
- свободно оперировать понятиями: непрерывные функции; точки разрыва графика функции; асимптоты графика функции;
- свободно оперировать понятием: функция, непрерывная на отрезке, применять свойства непрерывных функций для решения задач;
- свободно оперировать понятиями: первая и вторая производные функции, касательная к графику функции;
- вычислять производные суммы, произведения, частного и композиции двух функций; знать производные элементарных функций;
- использовать геометрический и физический смысл производной для решения задач.

Множества и логика

- свободно оперировать понятиями: множество, операции над множествами;
- использовать теоретико-множественный аппарат для описания реальных процессов и явлений, при решении задач из других учебных предметов;
- свободно оперировать понятиями: определение, теорема, уравнение-следствие, свойство математического объекта, доказательство, равносильные уравнения и неравенства

Учебный курс «Геометрия»

- свободно оперировать основными понятиями стереометрии при решении задач и проведении математических рассуждений;
- применять аксиомы стереометрии и следствия из них при решении геометрических задач;
- классифицировать взаимное расположение прямых в пространстве; плоскостей в пространстве; прямых и плоскостей в пространстве;
- свободно оперировать понятиями, связанными с углами в пространстве: между прямыми в пространстве; между прямой и плоскостью;
- свободно оперировать понятиями, связанными с многогранниками;

- свободно распознавать основные виды многогранников (призма, пирамида, прямоугольный параллелепипед, куб);
- классифицировать многогранники, выбирая основания для классификации;
- свободно оперировать понятиями, связанными с сечением многогранников плоскостью;
- выполнять параллельное, центральное и ортогональное проектирование фигур на плоскость; выполнять изображения фигур на плоскости;
- строить сечения многогранников различными методами, выполнять (выносные) плоские чертежи из рисунков простых объемных фигур: вид сверху, сбоку, снизу;
- вычислять площади поверхностей многогранников (призма, пирамида), геометрических тел с применением формул;
- свободно оперировать понятиями: симметрия в пространстве; центр, ось и плоскость симметрии; центр, ось и плоскость симметрии фигуры;
- свободно оперировать понятиями, соответствующими векторам и координатам в пространстве;
- выполнять действия над векторами;
- решать задачи на доказательство математических отношений и нахождение геометрических величин, применяя известные методы при решении математических задач повышенного и высокого уровня сложности;
- применять простейшие программные средства и электронно-коммуникационные системы при решении стереометрических задач;
- извлекать, преобразовывать и интерпретировать информацию о пространственных геометрических фигурах, представленную на чертежах и рисунках;
- применять полученные знания на практике: сравнивать и анализировать реальные ситуации, применять изученные понятия в процессе поиска решения математически сформулированной проблемы, моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин
- иметь представления об основных этапах развития геометрии как составной части фундамента развития технологий

Учебный курс «Вероятность и статистика»

- свободно оперировать понятиями: граф, плоский граф, связный граф, путь в графе, цепь, цикл, дерево, степень вершины, дерево случайного эксперимента;
- свободно оперировать понятиями: случайный эксперимент (опыт), случайное событие, элементарное случайное событие (элементарный исход) случайного опыта; находить вероятности событий в опытах с равновозможными элементарными событиями;
- находить и формулировать события: пересечение, объединение данных событий, событие, противоположное данному; использовать диаграммы Эйлера, координатную прямую для решения задач; пользоваться формулой сложения вероятностей для вероятностей двух и трех случайных событий;
- оперировать понятиями: условная вероятность, умножение вероятностей, независимые события, дерево случайного эксперимента; находить вероятности событий с помощью правила умножения, дерева случайного опыта, использовать формулу полной вероятности, формулу Байеса при решении задач; определять независимость событий по формуле и по организации случайного эксперимента;
- применять изученные комбинаторные формулы для перечисления элементов множеств, элементарных событий случайного опыта, решения задач по теории вероятностей;
- свободно оперировать понятиями: бинарный случайный опыт (испытание), успех и неудача, независимые испытания, серия испытаний; находить вероятности событий: в серии испытаний до первого успеха; в серии испытаний Бернулли; в опыте, связанном со случайным выбором из конечной совокупности;
- свободно оперировать понятиями: случайная величина, распределение вероятностей, диаграмма распределения, бинарная случайная величина, геометрическое, биномиальное распределение

1.2.2. Пример итоговой контрольной работы по курсу алгебры и начал математического анализа. 10 класс

1.2.2.1. Спецификация контрольно-измерительных материалов для оценки достижения планируемых результатов обучения по алгебре и началам математического анализа в 10 классе на углубленном уровне

Назначение работы: определение уровня достижения планируемых результатов освоения обучающимися учебного курса «Алгебра и начала математического анализа» для 10 класса на углубленном уровне. Работа носит диагностический характер, позволяя учителю и обучающимся по каждому из основных результатов определить уровень его достижения, выявить пробелы в подготовке, скорректировать подготовку к единому государственному экзамену.

Документы, определяющие нормативно-методическую базу контрольной работы:

1. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования (приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 12.08.2022 №732 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования»);

2. Федеральная рабочая программа среднего общего образования. Математика. Углубленный уровень.

Структура работы:

Всего в работе 30 заданий, среди них 15 заданий обязательного уровня и 15 заданий повышенного уровня освоения курса, сгруппированных попарно и обозначенных буквами А (обязательный уровень) и Б (повышенный уровень). Таким образом, каждое предметное умение представлено заданием и на базовом, и на углубленном уровне. Это дает обучающемуся возможность выстроить собственную стратегию выполнения работы. В зависимости от уровня подготовки он может, например, сначала выполнить все задания обязательного уровня (буква А), а затем повышенного (буква Б) или в каждом случае выбирать, какие задания он будет выполнять сначала, а к каким вернется позже при наличии времени, конечно же, он может выполнять все задания последовательно, если его цель – выполнить как можно больше заданий и набрать как можно больше баллов.

Задания обозначены в работе также специальными значками:

- – задание обязательного уровня;
- – задание повышенного уровня.

Распределение заданий по разделам содержания приведено в таблице 1.

Табл. 1. Распределение заданий по разделам содержания

<i>Название раздела содержания</i>	<i>Число заданий</i>
Числа и вычисления	10
Уравнения и неравенства	12
Функции и графики	6
Начала математического анализа	2

План контрольной работы приведен в таблице 2.

Сокращения: О – обязательный уровень, П – повышенный уровень.

Табл. 2. План варианта работы

<i>№ задания</i>	<i>Проверяемые умения</i>	<i>Уровень освоения</i>	<i>Макс. балл</i>	<i>Время выполнения, мин</i>
1А	свободно оперировать понятием:	О	1	2
1Б	степень с рациональным показателем	П	2	3
2А	применять дроби и проценты	О	1	2
2Б	для решения прикладных задач из различных отраслей знаний и реальной жизни	П	2	3
3А	свободно оперировать понятиями:	О	1	2
3Б	логарифм числа; десятичные и натуральные логарифмы	П	2	3
4А	свободно оперировать понятиями:	О	1	3
4Б	многочлен от одной переменной; многочлен с целыми коэффициентами, корни многочлена; применять деление многочлена на многочлен с остатком	П	2	3
5А	применять основные тригонометрические формулы для преобразования	О	1	3
5Б	тригонометрических выражений	П	2	3

<i>№ задания</i>	<i>Проверяемые умения</i>	<i>Уровень освоения</i>	<i>Макс. балл</i>	<i>Время выполнения, мин</i>
6А	свободно оперировать понятием:	О	1	3
6Б	иррациональное уравнение; находить их решения	П	2	3
7А	свободно оперировать понятием:	О	1	3
7Б	логарифмическое уравнение; находить их решения	П	2	3
8А	свободно оперировать понятием:	О	1	3
8Б	тригонометрическое уравнение; применять необходимые формулы для решения основных типов тригонометрических уравнений	П	2	4
9А	свободно оперировать понятиями: матрица, определитель матрицы 2x2; использовать свойства определителя 2x2 для вычисления его значения	О	1	2
9Б	применять определители для решения системы линейных уравнений	П	2	3
10А	моделировать реальные ситуации	О	1	4
10Б	на языке алгебры, составлять уравнения, неравенства по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры	П	2	4
11А	свободно оперировать понятием:	О	1	2
11Б	логарифмическая функция; использовать свойства функции для сравнения значений выражений	П	2	3
12А	применять метод интервалов для	О	1	3
12Б	решения неравенств	П	2	3
13А	использовать графики функций для	О	1	3
13Б	решения уравнений	П	2	3

<i>№ задания</i>	<i>Проверяемые умения</i>	<i>Уровень освоения</i>	<i>Макс. балл</i>	<i>Время выполнения, мин</i>
14А	свободно оперировать понятиями:	О	1	3
14Б	непрерывные функции; точки разрыва графика функции; асимптоты графика функции	П	2	4
15А	свободно оперировать понятием:	О	1	3
15Б	область определения функции	П	2	4

Время выполнения работы:

На выполнение контрольной работы отводится 90 мин.

Оценивание результатов выполнения работы:

Критерии оценивания должны быть открыты для обучающихся с тем, чтобы они понимали, как и за что выставляется та или иная отметка.

Контрольная работа и, соответственно, критерии оценки составлены таким образом, чтобы у обучающихся было «право на ошибку» при выполнении работы как на отметку «3», так и на отметку «5».

Предлагаемые критерии оценивания носят рекомендательный характер и могут корректироваться учителем в зависимости от особенностей класса. При этом, однако, целесообразно сохранять два описанных выше требования: надо, чтобы обучающимся было объяснено, за что будет выставляться та или иная отметка; надо, чтобы у обучающихся сохранялось «право на ошибку».

Задание 14 считается выполненным верно, если обучающийся выбрал все верные варианты ответа. Задания 4, 5, 9, 13 считаются выполненными верно, если обучающийся дал верный ответ на вопрос задания и привел соответствующее ответу решение. В остальных заданиях достаточно верного ответа.

За задания обязательного уровня освоения курса максимально начисляемое количество баллов равно 1, за задания повышенного уровня – 2. Таким образом, максимальный балл за работу равен 45, если выполнены задания только обязательного уровня, то максимально можно получить 15 баллов, если только повышенного – 30.

Обучающийся сам выбирает стратегию выполнения работы в зависимости от своего уровня подготовки по курсу в целом или по отдельным его темам. Например, он может выполнять сначала только задания А, а затем приступить

к выполнению заданий Б, из тех тем, в которых чувствует себя более уверенно, или, выбирая номер задания, выполнять оба входящих в него задания – и А, и Б или даже выполнить сначала все задания Б, а затем, в случае если у него останется время, выполнить задания А.

В таблице 3 приводится рекомендуемое наименьшее число заданий, которые необходимо выполнить, чтобы получить отметки «3», «4» и «5».

Табл. 3. Рекомендации по оцениванию выполнения контрольной работы

<i>Отметка</i>	Отметка «3»	Отметка «4»	Отметка «5»
<i>Набрано баллов</i>	14	15 – 29	30 – 45

Для анализа результатов работы рекомендуется использовать таблицу 4, которую обучающийся заполняет самостоятельно, обращая внимание на соответствующие проверяемые умения. Если ученик не приступал к выполнению задания, он ставит знак «←».

Табл. 4. Результаты контрольной работы

<i>Номер задания</i>	<i>Набрано баллов</i>	
	<i>Задание А</i>	<i>Задание Б</i>
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		

Для заданий с кратким ответом и выбором ответа можно использовать самопроверку. В таблице 5 даются ответы к заданиям контрольной работы.

Табл. 5. Ответы к заданиям контрольной работы

Номер задания	Вариант 1	
	Задание А	Задание Б
1	6	-3,9
2	30 р.	34 560 дет.
3	648	0,5
4	Не является	$3x^2 - 5x$
5	$\sin^2\alpha$	12
6	12	4
7	2 корня	-1; 1
8	$\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$	4
9	Неверно	(1; 5)
10	14 кг	Не более 3 доставок
11	$\log_{\sqrt{5}} 6,02 < \log_{\sqrt{5}} 6,2$	$1 < \log_{1,5} 2 < 2$
12	$(-\infty; -4] \cup [0, 4; +\infty)$	$[-2; 3)$
13	1 корень	Корней нет
14	а, в	б, д
15	$(6; +\infty)$	5

Номер задания	Вариант 2	
	Задание А	Задание Б
1	5	-5,7
2	48 р.	43 923 дет.
3	726	0,5
4	Является	$2x^2 - 3x$
5	$\cos^2\alpha$	6
6	7	5
7	2 корня	-2; 2
8	$(-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$ $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$	0
9	Верно	(3; 2)
10	5 кг	Не более 4 доставок
11	$\log_{\sqrt{7}} 7,9 > \log_{\sqrt{7}} 7,09$	$2 < \log_{2,5} 7 < 3$
12	$[-0,5; 6]$	$[5; +\infty)$
13	2 корня	0
14	б, в	а, б
15	$(7; +\infty)$	3

1.2.2.2. Итоговая контрольная работа по курсу «Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень». 10 класс

Вариант 1

1. ○ А) Найдите значение выражения $36^{\frac{3}{8}} \cdot 6^{\frac{1}{4}}$. *Ответ:* _____

● Б) Найдите значение выражения
 $(-\sqrt[4]{1,21} + 25^{\frac{1}{4}})(-\sqrt[4]{1,21} - 25^{\frac{1}{4}})$ *Ответ:* _____

2. ○ А) *Решите задачу:* *Ответ:* _____

Билет на проезд в автобусе стоит 50 р. Студентам предоставляется скидка на билет для проезда в автобусе в размере 40%. Сколько рублей стоит билет на автобус для студентов?

● Б) *Решите задачу:* *Ответ:* _____

Завод выпускает 20 000 деталей в год. Усовершенствование оборудования позволит увеличивать количество выпускаемых деталей на 20% ежегодно в течение трех лет. Сколько деталей будет выпускать завод через 3 года?

3. ○ А) Вычислите $8^{2\log_8 9+1}$. *Ответ:* _____

● Б) Найдите значение выражения $\log_{0,25} \sqrt{11} \cdot \log_{\sqrt{11}} 0,5$. *Ответ:* _____

4. ○ А) Определите, является ли число 2 корнем многочлена *Ответ:* _____

$$P(x) = x^5 - 2x^4 + 7x^2 - 15x + 3.$$

Решение: _____

● Б) Найдите остаток от деления многочлена *Ответ:* _____
 $-9x^3 + 21x^2 - 10x$ на двучлен $-3x + 2$.

Решение: _____

5. ○ А) Упростите выражение $0,5 \operatorname{tg}^2 \alpha (1 + \cos 2\alpha)$. *Ответ:* _____

Решение: _____

- Б) Упростите выражение $(1 - \cos 4\alpha) \frac{6}{\cos^2(2\alpha + \frac{\pi}{2})}$. Ответ: _____

Решение: _____

6. А) Решите уравнение $\sqrt{28-x} - 4 = 0$. Ответ: _____

- Б) Решите уравнение $\sqrt{5-x} + 3 = x$. Ответ: _____

7. А) Сколько корней имеет уравнение $\lg^2 x - 8 \lg x + 7 = 0$? Ответ: _____

- Б) Решите уравнение $\log_2(x^4 + 1) - \log_{\sqrt{2}} \sqrt{-2x^2 + 4} = 0$. Ответ: _____

8. А) Решите уравнение $\sqrt{2} \cos(2\pi + x) = 1$. Ответ: _____

- Б) Найдите корень уравнения $\sin \pi \sqrt{x} = \cos \frac{3\pi}{2}$, Ответ: _____

принадлежащий отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2} \right]$.

9. А) Верно ли утверждение: определитель матрицы Ответ: _____

$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ является отрицательным числом?

Решение: _____

- Б) Решите систему уравнений $\begin{cases} 7x - 3y = -8, \\ -5x + 2y = 5, \end{cases}$ используя Ответ: _____

определитель.

Решение: _____

10. А) Решите задачу: Ответ: _____

Отношение массы олова и никеля в первом сплаве равно 5 : 4, а во втором – 1 : 8. Из двух этих сплавов нужно получить 16 кг нового сплава с равным содержанием олова и никеля. Сколько килограммов первого сплава нужно взять для получения нового сплава?

- Б) Решите задачу: Ответ: _____

В пекарню за день планируется 7 доставок муки и сахарного песка. Стоимость одной доставки муки

составляет 2000 р., а одной доставки сахарного песка – 4000 р. Сколько доставок сахарного песка можно планировать на один день, если расходы на доставку муки и сахарного песка не должны превышать 22 000 р.?

11. ○ А) Сравните $\log_{\sqrt{5}} 6,02$ и $\log_{\sqrt{5}} 6,2$. *Ответ:* ____

● Б) Между какими двумя последовательными целыми числами находится число $\log_{1,5} 2$? *Ответ:* ____

12. ○ А) Решите неравенство $(5x - 2)(x + 4) \geq 0$. *Ответ:* ____

● Б) Решите неравенство $\frac{\sqrt{x+2}}{x^2-9} \leq 0$. *Ответ:* ____

13. ○ А) Сколько корней имеет уравнение $2^x = \frac{1}{x+2}$? *Ответ:* ____

Решение: _____

● Б) Решите уравнение $\sin x = x^2 + 2$. *Ответ:* ____

Решение: _____

14. ○ А) Какие из данных утверждений являются верными *Ответ:* ____

для функции $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$?

а) Функция не является ни четной, ни нечетной.

б) Областью определения функции является промежуток $[-1; 1]$.

в) Областью значений функции является промежуток $[-1; 1]$.

г) Функция не имеет экстремумов.

● Б) Какие из данных утверждений являются верными *Ответ:* ____

для функции $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x(x-5)}$?

а) Функция является четной.

б) Функция имеет 2 асимптоты.

в) Функция имеет 2 точки разрыва.

г) $f'(x) < 0$ на множестве \mathbb{R} .

д) Функция не имеет экстремумов.

15. ○ А) Найдите область определения функции $f(x) = \frac{x^2 - 25}{\sqrt{x - 6}}$. Ответ: _____
- Б) Сколько целых значений принадлежит области определения функции $f(x) = \log_5(54 - 6x^2)$? Ответ: _____

Вариант 2

1. ○ А) Найдите значение выражения $5^{\frac{1}{6}} \cdot 25^{\frac{5}{12}}$. Ответ: _____
- Б) Найдите значение выражения: $(-\sqrt[4]{1,69} - 49^{\frac{1}{4}})(-\sqrt[4]{1,69} + 49^{\frac{1}{4}})$ Ответ: _____
2. ○ А) Решите задачу: Ответ: _____
 Билет на вход в парк стоит 120 р. Школьникам предоставляется скидка на вход в парк в размере 60%. Сколько рублей стоит билет на вход в парк для школьников?
- Б) Решите задачу: Ответ: _____
 Завод выпускает 30 000 деталей в год. Усовершенствование оборудования позволит увеличивать количество выпускаемых деталей на 10% ежегодно в течение трех лет. Сколько деталей будет выпускать завод через 4 года?
3. ○ А) Вычислите $6^{2\log_6 11 + 1}$. Ответ: _____
- Б) Найдите значение выражения $\log_{0,16} \sqrt{13} \cdot \log_{\sqrt{13}} 0,4$. Ответ: _____
4. ○ А) Определите, является ли число 3 корнем многочлена $P(x) = x^5 - 4x^4 + 7x^2 + 11x - 15$. Ответ: _____
 Решение: _____

- Б) Найдите остаток от деления многочлена $-8x^3 + 14x^2 + 3x$ на двучлен $-4x + 1$. Ответ: _____
 Решение: _____

5. ○ А) Упростите выражение $0,5 \operatorname{ctg}^2 \alpha (1 - \cos 2\alpha)$. Ответ: _____
 Решение: _____

• Б) Упростите выражение $\frac{3}{\sin^2(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha)}(1 + \cos 4\alpha)$.

Ответ: _____

Решение: _____

6. ○ А) Решите уравнение $\sqrt{32-x} - 5 = 0$.

Ответ: _____

• Б) Решите уравнение $\sqrt{14-x} + 2 = x$.

Ответ: _____

7. ○ А) Сколько корней имеет уравнение $\lg^2 x - 4\lg x - 5 = 0$?

Ответ: _____

• Б) Решите уравнение $\log_{\sqrt{17}} \sqrt{-x^2 + 21} - \log_{17}(x^4 + 1) = 0$.

Ответ: _____

8. ○ А) Решите уравнение $\sqrt{2} \sin(\pi - x) = 1$.

Ответ: _____

• Б) Найдите корень уравнения $\cos(\pi\sqrt{x}) = \sin \frac{\pi}{2}$,

Ответ: _____

принадлежащий отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

9. ○ А) Верно ли утверждение: определитель матрицы

Ответ: _____

$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ является положительным числом?

Решение: _____

• Б) Решите систему уравнений $\begin{cases} 5x - 4y = 7, \\ -6x + 7y = -4, \end{cases}$ используя

Ответ: _____

определитель.

Решение: _____

10. ○ А) Решите задачу:

Ответ: _____

Отношение массы серебра и меди в первом сплаве равно 4 : 7, а во втором – 5 : 6. Из двух этих сплавов нужно получить 10 кг нового сплава с равным содержанием серебра и меди. Сколько килограммов второго сплава нужно взять для получения нового сплава?

• Б) Решите задачу:

Ответ: _____

В офисную столовую за день планируется 9 доставок овощей и фруктов. Стоимость одной доставки овощей составляет 3000 р., а одной доставки фруктов – 5000 р.

Сколько доставок фруктов можно планировать на один день, если расходы на доставку овощей и фруктов не должны превышать 33 000 р.?

11. ○ А) Сравните $\log_{\sqrt{7}} 7,9$ и $\log_{\sqrt{7}} 7,09$. *Ответ:* _____

● Б) Между какими двумя последовательными целыми числами находится число $\log_{2,5} 7$? *Ответ:* _____

12. ○ А) Решите неравенство $(2x + 1)(x - 6) \leq 0$. *Ответ:* _____

● Б) Решите неравенство $\frac{\sqrt{x-5}}{x^2-16} \geq 0$. *Ответ:* _____

13. ○ А) Сколько корней имеет уравнение $3^x = \sqrt{x+3}$? *Ответ:* _____

Решение: _____

● Б) Решите уравнение $\cos x = x^2 + 1$. *Ответ:* _____

Решение: _____

14. ○ А) Какие из данных утверждений являются верными для *Ответ:* _____

функции $f(x) = \cos(3x - \frac{\pi}{4})$?

а) Функция является четной.

б) Областью определения функции является множество \mathbb{R} .

в) Областью значений функции является промежуток $[-1; 1]$.

г) Функция не имеет экстремумов.

● Б) Какие из данных утверждений являются верными *Ответ:* _____

для функции $f(x) = \frac{16-x^2}{x(x-4)}$?

а) Функция не является ни четной, ни нечетной.

б) Функция имеет 2 асимптоты.

в) Функция имеет 2 точки разрыва.

г) $f'(x) > 0$ на множестве \mathbb{R} .

д) Функция имеет экстремумы.

15. ○ А) Найдите область определения функции $f(x) = \frac{x^2-16}{\sqrt{x-7}}$. *Ответ:* _____

● Б) Сколько целых значений принадлежит области *Ответ:* _____
определения функции $f(x) = \log_5(16-4x^2)$?

1.2.3. Пример итоговой контрольной работы по курсу геометрии. 10 класс

1.2.3.1. Спецификация контрольно-измерительных материалов для оценки достижения планируемых результатов обучения по геометрии в 10 классе на углубленном уровне

Назначение работы: определение соответствия образовательных результатов освоения обучающимися учебного курса «Геометрия» 10 класса на углубленном уровне. Работа носит диагностический характер, позволяя учителю и обучающимся по каждому из основных результатов определить уровень овладения соответствующим ему умением, выявить пробелы в подготовке обучающегося, скорректировать подготовку к единому государственному экзамену.

Документы, определяющие нормативно-методическую базу контрольной работы:

1. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования (приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 12.08.2022 № 732 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования»);

2. Федеральная рабочая программа среднего общего образования. Математика. Углубленный уровень.

Структура работы:

Всего в работе 9 заданий, среди них 6 заданий обязательного уровня и 3 задания повышенного уровня освоения курса.

Задания обозначены в работе специальными значками:

- – задание обязательного уровня;
- – задание повышенного уровня.

Распределение заданий по разделам содержания приведено в таблице 1.

Табл. 1. Распределение заданий по разделам содержания

<i>Название раздела содержания</i>	<i>Число заданий</i>
Прямые и плоскости в пространстве	5
Многогранники	3
Векторы и координаты в пространстве	1

Задания сгруппированы в два блока в соответствии с видом многогранника: блок 1 (№ 1–5) – пирамида и блок 2 (№ 6–9) – призма, причем обучающимся предлагается одна пирамида и одна призма. В каждом блоке есть задания и обязательного и повышенного уровней.

План контрольной работы приведен в таблице 2.

Сокращения: О – Обязательный уровень, П – повышенный уровень.

Табл. 2. План варианта работы

<i>№ задания</i>	<i>Проверяемые умения</i>	<i>Уровень освоения</i>	<i>Макс. балл</i>	<i>Время выполнения, мин</i>
1	Классифицировать взаимное расположение прямых в пространстве	О	1	3
2	Свободно оперировать понятиями, связанными с углами в пространстве: между прямыми в пространстве; между прямой и плоскостью	О	1	3
3	Выполнять действия над векторами	О	1	3
4	Классифицировать взаимное расположение прямых в пространстве; плоскостей в пространстве; прямых и плоскостей в пространстве	О	1	4
5	Строить сечения многогранников различными методами	П	2	6
6	Свободно оперировать понятиями, связанными с многогранниками	О	1	4
7	Свободно оперировать понятиями, связанными с углами в пространстве: между прямой и плоскостью	О	1	5
8	Классифицировать взаимное расположение плоскостей в пространстве	П	2	6
9	Вычислять площадь поверхности призмы	П	2	6

Время выполнения работы:

На выполнение контрольной работы отводится 40–60 мин, что зависит от уровня математической подготовки обучающихся класса.

Оценивание результатов выполнения работы:

Критерии оценивания должны быть открыты для обучающихся с тем, чтобы они понимали, как и за что выставляется та или иная отметка.

Контрольная работа и, соответственно, критерии оценки составлены таким образом, чтобы у обучающихся было «право на ошибку» при выполнении работы как на отметку «3», так и на отметку «5».

Предлагаемые критерии оценивания носят рекомендательный характер и могут корректироваться учителем в зависимости от особенностей класса. При этом, однако, целесообразно сохранять два описанных выше требования: надо, чтобы обучающимся было объяснено, за что будет выставляться та или иная отметка; надо, чтобы у обучающихся сохранялось «право на ошибку».

Задание 4 считается выполненным верно, если обучающийся отметил номера **всех** верных утверждений, в противном случае задание не считается выполненным. Задания 6, 7 считаются выполненными верно, если обучающийся дал верный ответ на вопрос задания и привел соответствующее ответу решение, задание 5 – если сечение построено им верно, задание 8 – если приведено верное доказательство. В заданиях 1, 2, 3, 9 достаточно привести верный ответ.

За задания обязательного уровня освоения курса максимально начисляемое количество баллов равно 1, за задания повышенного уровня – 2. Таким образом, максимальный балл за работу равен 12, если выполнены задания только обязательного уровня, то максимально можно получить 6 баллов, если только повышенного – 6.

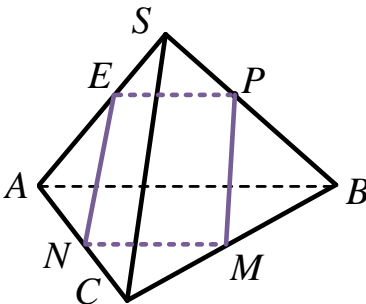
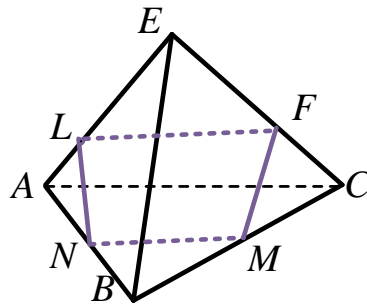
В таблице 3 приводится рекомендуемое наименьшее число заданий, которые необходимо выполнить, чтобы получить отметки «3», «4» и «5».

Табл.3. Рекомендации по оцениванию выполнения контрольной работы

<i>Отметка</i>	Отметка «3»	Отметка «4»	Отметка «5»
<i>Набрано баллов</i>	4	7	10

В таблице 4 даются ответы к заданиям контрольной работы.

Табл.4. Ответы к заданиям контрольной работы

Номер задания	Вариант 1	Вариант 2
1	AS	EC
2	30°	60°
3	\overline{CM}	\overline{BN}
4	1, 4	2, 3
5		
6	$2\sqrt{2}a$ см	$3b$ см
7	$\arctg \frac{2}{\sqrt{3}}$	$\arctg 0,25$
8		
9	$2(2 + \sqrt{3})a^2$ см ²	$2(2 + \sqrt{3})b^2$ см ²

1.2.3.2. Итоговая контрольная работа по курсу «Геометрия. Углубленный уровень». 10 класс

Вариант 1

Комплексное задание «Пирамида»

Дана пирамида $SABC$ (рис. 1). Известно, что $SO \perp (ABC)$, $\angle SMO = 30^\circ$, $SM \perp BC$, $P \in SB$.

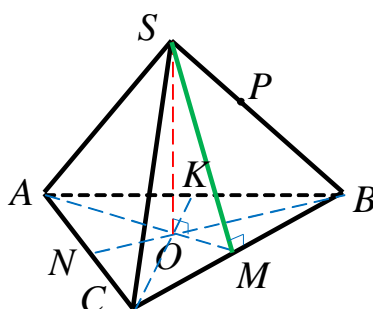


Рис. 1

Выполните задания № 1–5.

○ 1. Укажите прямую, скрещивающуюся с прямой BC .

- 1) AC ;
- 2) BS ;
- 3) AB ;
- 4) AS ;
- 5) CS .

○ 2. Найдите угол между плоскостями SBC и ABC .

Ответ: _____

○ 3. Укажите вектор, равный сумме векторов $\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{OS}$.

Ответ: _____

○ 4. Укажите верные утверждения.

- 1) Прямые SO и AM перпендикулярны.
- 2) Прямые SO и AC не перпендикулярны.
- 3) Плоскости ABC и SBC перпендикулярны.
- 4) Плоскости SAM и ABC перпендикулярны.

● 5. Постройте сечение пирамиды $SABC$ плоскостью NMP .

Комплексное задание «Призма»

Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ (рис. 2), сторона основания которой равна a см, а боковое ребро равно $2a$ см.

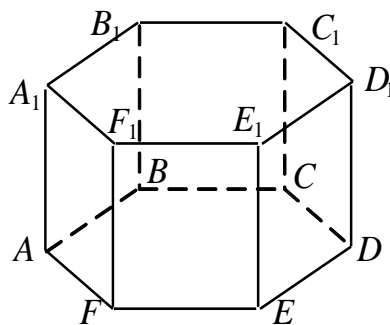


Рис. 2

Выполните задания № 6–9.

○ 6. Найдите длину FC_1 .

Ответ: _____

Решение: _____

○ 7. Найдите угол между прямой B_1F и плоскостью основания призмы.

Ответ: _____

Решение: _____

● 8. Докажите, что плоскость BB_1D_1D перпендикулярна плоскости основания призмы.

Доказательство: _____

● 9. Найдите площадь боковой поверхности многогранника $ABFA_1B_1F_1$.

Ответ: _____

Вариант 2

Комплексное задание «Пирамида»

Дана пирамида $EABC$ (рис. 1). Известно, что $EO \perp (ABC)$, $\angle ENO = 60^\circ$, $EN \perp AB$, $L \in AE$.

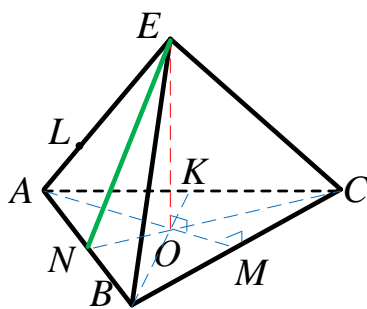


Рис. 1

Выполните задания № 1–5.

○ 1. Укажите прямую, скрещивающуюся с прямой AC .

- 1) AB ;
- 2) BC ;
- 3) BE ;
- 4) EC ;
- 5) EN .

○ 2. Найдите угол между плоскостями EAC и ABC .

Ответ: _____

○ 3. Укажите вектор, равный сумме векторов $\overrightarrow{EN} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OE}$.

Ответ: _____

○ 4. Укажите верные утверждения.

- 1) Прямые EO и BC не перпендикулярны.
- 2) Прямые CN и EO перпендикулярны.
- 3) Плоскости CEN и ABC перпендикулярны.
- 4) Плоскости ABC и BEC перпендикулярны.

● 5. Постройте сечение пирамиды $EABC$ плоскостью NLM .

Комплексное задание «Призма»

Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ (рис. 2), сторона основания которой равна $2b$ см, а боковое ребро равно b см.

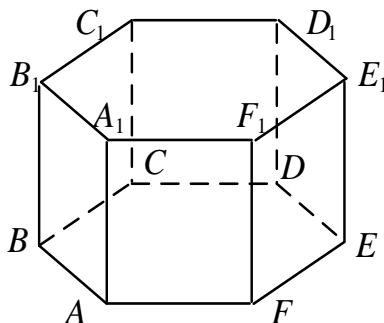


Рис. 2

Выполните задания №6 – 10.

○ 6. Найдите длину AD_1 .

Ответ: _____

Решение: _____

○ 7. Найдите угол между прямой A_1D и плоскостью основания призмы.

Ответ: _____

Решение: _____

- 8. Докажите, что плоскость CC_1F_1F перпендикулярна плоскости основания призмы.

Доказательство: _____

- 9. Найдите площадь боковой поверхности многогранника $DEFD_1E_1F_1$.

Ответ: _____

РАЗДЕЛ 2.
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ
ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ УЧЕБНОГО
ПРЕДМЕТА «МАТЕМАТИКА» НА УГЛУБЛЕННОМ УРОВНЕ
В 10–11 КЛАССАХ

2.1. Методические рекомендации по организации обучения математике
в цифровой образовательной среде

2.1.1. Инициативы, определяющие создание цифровой
образовательной среды

В настоящее время в нашей стране реализуется целый ряд стратегий и программ, направленных на развитие информационного общества, формирование цифровой экономики. В первую очередь это «Стратегия развития информационного общества в Российской Федерации на 2017–2030 годы» [23], определяющая цели и задачи в сфере применения информационных и коммуникационных технологий, и Национальная программа «Цифровая экономика Российской Федерации» [25].

В стратегии представлены принципы развития информационного общества и сформулированы его основные понятия. Одним из понятий является «общество знаний», т. е. общество, в котором для развития гражданина большое значение имеет работа с достоверной информацией, учитывающей стратегические национальные приоритеты России.

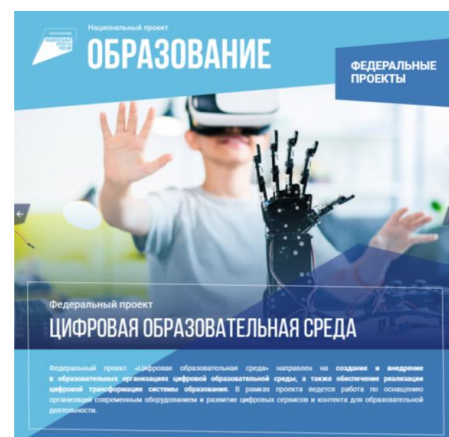
Программа включает целый ряд федеральных проектов, в частности проект «Цифровые технологии». Целью программы является обеспечение доступности новых цифровых ресурсов для граждан и бизнеса.

Одним из социально значимых объектов применения информационных и коммуникационных технологий являются образовательные организации. В программе отмечается, например, что школы будут переведены на российские приложения онлайн-коммуникаций и получают средства на приобретение электронного образовательного контента.

Приоритетным проектом в области образования является федеральный проект «Цифровая образовательная среда» Минпросвещения России [29]. Этот проект направлен на «создание и внедрение в образовательных организациях цифровой образовательной среды, а также обеспечение реализации цифровой

трансформации системы образования». В рамках этого проекта ведется работа по оснащению образовательных организаций оборудованием и по развитию цифровых сервисов и контента для образовательной деятельности.

Все это должно отразиться на организации образовательного процесса, качестве образования по всем школьным предметам, в том числе и математике.



2.1.2. Цифровые образовательные ресурсы и платформы для организации обучения математике

Успех обучающихся в личностной реализации в информационном обществе, в частности, зависит от сформированности умений работать в цифровой среде. Поэтому в образовательный процесс по математике нужно включать использование цифровых образовательных ресурсов и платформ, ориентированных на формирование предметных знаний, на достижение метапредметных результатов, в том числе и функциональной математической грамотности. При отборе ресурсов учитель должен обращать внимание на объем и структуру информации, ее научность и достоверность, возможность видоизменения объектов.

Приведем примеры ресурсов и программ, которые учитель может использовать для организации обучения математике в цифровой образовательной среде.

На портале «Единое содержание общего образования» [15], оператором которого является ИСРО, размещена информация и материалы в направлении научно-методической поддержки учителей-предметников, в том числе, преподающих математику на уровне основного общего и среднего общего образования, и организации обучения математике (рис. 1).

Условно можно выделить три группы представленных материалов. К первому относятся методические семинары и методические кейсы, ко второму – методические пособия, третье направление представлено лабораторно-практическими работами.

Единое содержание общего образования. – Сайт: <https://edsoo.ru/>

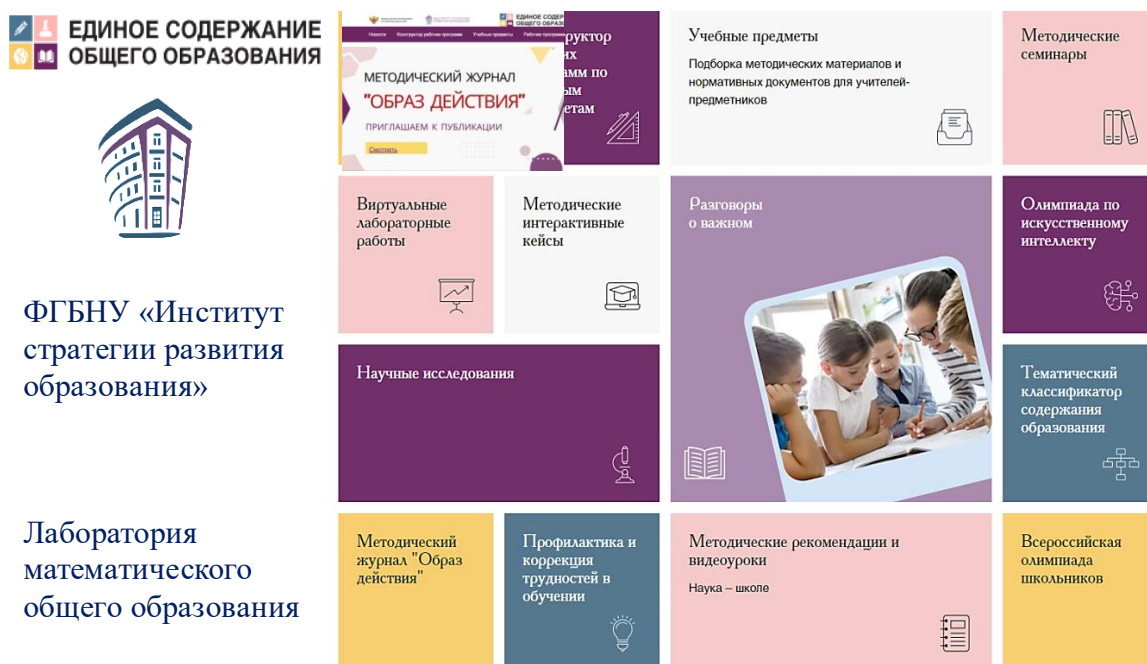


Рис. 1

На *методических семинарах* и в *методических пособиях* рассматриваются вопросы реализации ФГОС основного общего и среднего общего образования, научные и методические основы обучения математике, даны рекомендации по организации образовательного процесса по математике во всех его аспектах, включая рассмотрение новых элементов содержания обучения математике и путей достижения планируемых результатов (рис. 2).

Методические семинары

План семинаров "Методическая поддержка учителей математики при введении и реализации обновленных ФГОС ООО и СОО"			
ДАТА И ВРЕМЯ	СПИКЕР	ПОДКЛЮЧЕНИЕ	ИТОГОВЫЕ МАТЕРИАЛЫ
8 сентября, 14:30 мск Обновленный ФГОС и новая программа учебного предмета «Математика» для основной школы. Смысловое чтение на уроках математики как основная предпосылка формирования предметных и метапредметных результатов обучения	Рослова Лариса Олеговна, заведующий лабораторией математического общего образования и информатики ФГБНУ «ИСРО РАО» Бушко Елена Владимировна, научный сотрудник лаборатории математического общего образования и информатики ФГБНУ «ИСРО РАО»	https://vk.com/video7162_45662_456239132	https://drive.google.com/file/d/1hA27YpyyRZYgAlu1ln8DjO2RppqpAxJ8/view?usp=sharing https://vk.com/video7162_45662_456239132
6 октября, 14:30 мск Уроки математики в 5 классе. Изучение темы «Натуральные числа». Формирование функциональной математической грамотности пятиклассников при изучении темы	Рослова Лариса Олеговна, заведующий лабораторией математического общего образования и информатики ФГБНУ «ИСРО РАО» Алексеева Елена Евгеньевна, старший научный сотрудник лаборатории математического общего образования и информатики ФГБНУ «ИСРО РАО»	https://vk.com/video7162_45662_456239128	https://drive.google.com/file/d/1NOFmFqebked_N4v4ZlyUEHQXnxWXkAl/view?usp=sharing https://vk.com/video7162_45662_456239128
3 ноября, 14:30 мск Изучение темы «Наглядная геометрия» в 5 классах. Особенности формирования и развития метапредметных результатов обучения и логического мышления у	Рослова Лариса Олеговна, заведующий лабораторией математического общего образования и информатики ФГБНУ «ИСРО РАО» Алексеева Елена Евгеньевна, старший научный сотрудник лаборатории математического общего	https://vk.com/video7162_45662_456239153	https://drive.google.com/file/d/1CYoLXaviHglPTLNDa6N4hvxNQkGQOQel/view?usp=sharing https://vk.com/video7162_45662_456239153

Рис. 2

В *методических кейсах* рассмотрены наиболее сложные вопросы преподавания математики, с которыми могут столкнуться в практической деятельности учителя математики, включая вопросы достижения: *предметных* результатов обучения в 5–6 и в 7–11 классах на базовом и углубленном уровнях обучения; *метапредметных* результатов обучения математике, например функциональной математической грамотности; *личностных* результатов обучения средствами математики, в частности вопросы формирования гражданско-патриотических ценностей на уроках математики (рис. 3).

Методические кейсы

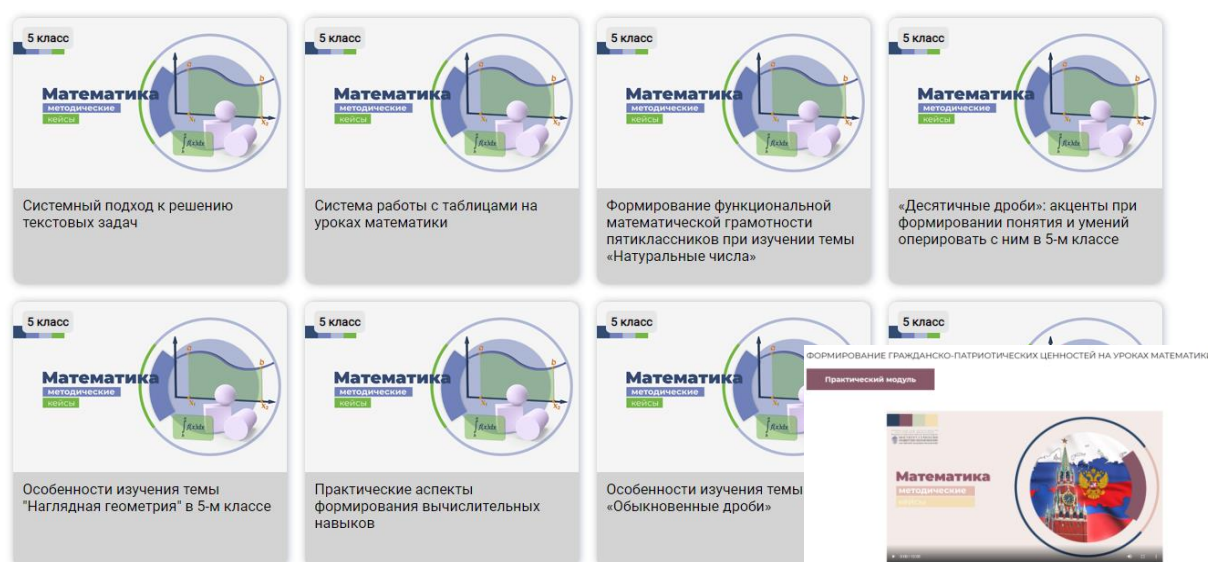


Рис. 3

Лабораторно-практические работы для 10–11 классов

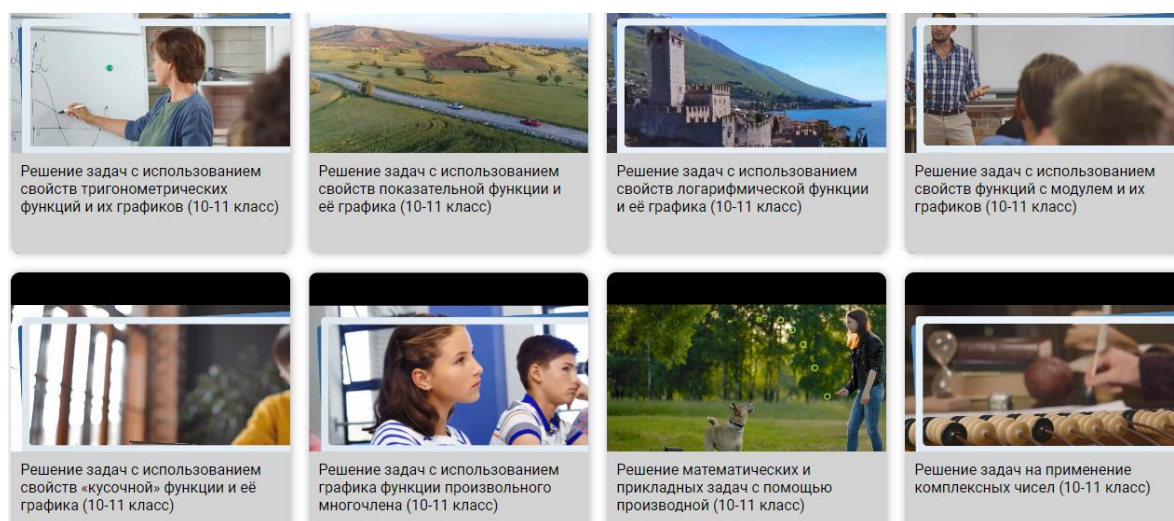


Рис. 4

Лабораторно-практические работы по математике можно использовать в качестве электронного образовательного ресурса для организации деятельности обучающихся в рамках виртуальной математической лаборатории на уровне основного общего и среднего общего образования (рис. 4).

Более подробно с материалами можно познакомиться на соответствующих страницах портала «Единое содержание общего образования» (рис. 1), а с рекомендациями по использованию лабораторно-практических работ как электронного образовательного ресурса во второй части пособия и в методических рекомендациях для учителей «Интерактивные лабораторно-практические работы. Учебный предмет “Математика”».

На сайте **math.ru** размещено большое количество книг и пособий по математике, сборников математических задач, в том числе и заданий для организации изучения математики на углубленном уровне (рис. 5) [11].

Math.ru – Сайт <https://math.ru>

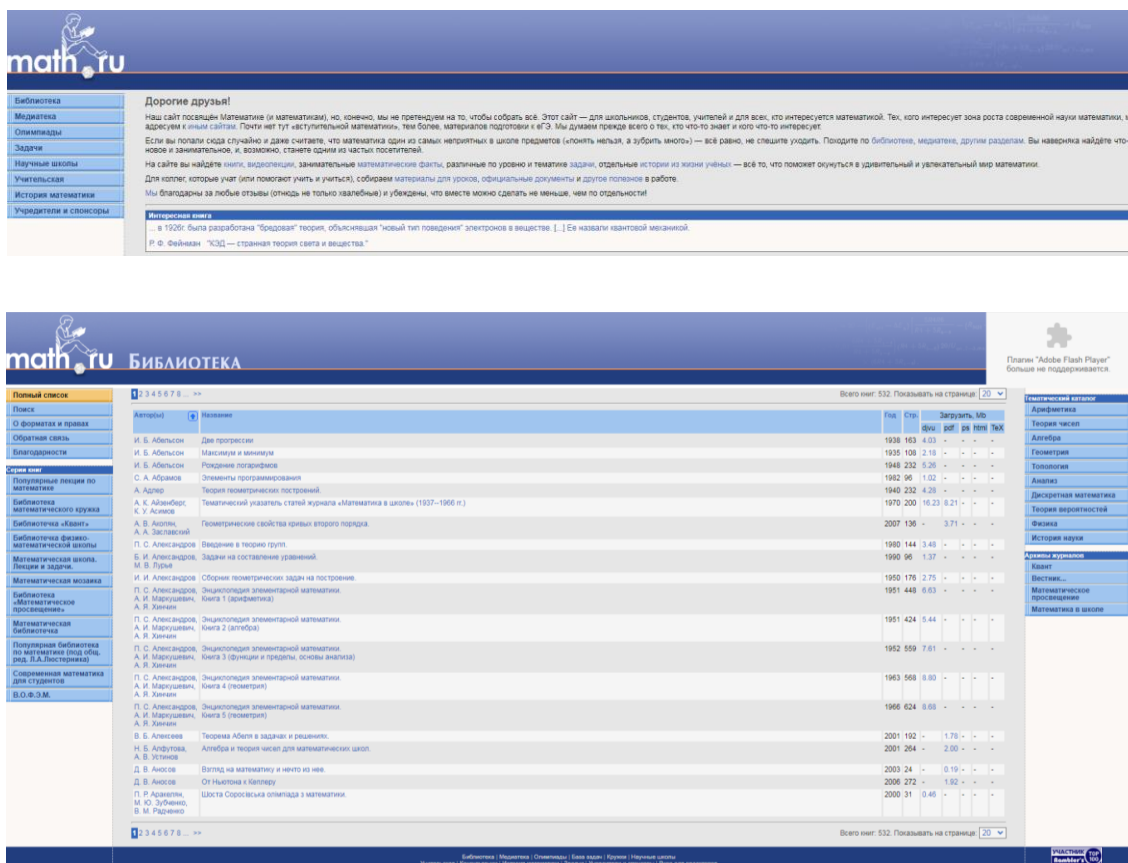


Рис. 5

Учитель математики может использовать материалы, размещенные на сайте, при подготовке к урокам, занятиям в рамках внеурочной деятельности, при подготовке обучающихся к олимпиадам. Кроме этого, учитель может

предложить изучение того или иного материала в качестве домашнего задания при использовании технологии «перевернутого класса». Обучающиеся могут использовать материалы при подготовке проектов, докладов на конференции.

На сайте «**Задачи по геометрии**» представлена информационно-поисковая система «Задачи по геометрии». Сейчас система содержит 10127 задач по планиметрии и 3560 задач по стереометрии разного уровня сложности. К задачам имеются решения, указания и ответы. Практически к каждой задаче есть чертеж. Система, хотя и сложна, но имеет достаточно удобный тематический поиск (рис. 6) [16].

Учитель может отобрать задачи разного уровня сложности и организовать на уроке групповую или индивидуальную работу с учетом уровня изучения геометрии. Обучающиеся самостоятельно могут решать задачи с последующей проверкой и самооценкой, используя прилагаемое решение.

Задачи по геометрии. – Сайт: <https://zadachi.mccme.ru/2012/local.html>



Рис. 6

Образовательный центр «Сириус» – федеральный общедоступный бесплатный ресурс. Центр проводит онлайн-курсы по математике, на которых могут обучаться школьники и учителя математики, принять участие в курсах могут также и родители обучающихся (рис. 7). Авторами курсов являются преподаватели ведущих российских школ и вузов, действующие педагоги очных программ Образовательного центра «Сириус». Учебные модули курсов включают видеолекции и конспекты, упражнения для закрепления теории задачи для самостоятельного решения. Материал курсов представлен на базовом и продвинутом уровнях [18].

Сириус. – Сайт: <https://sochisirius.ru/>

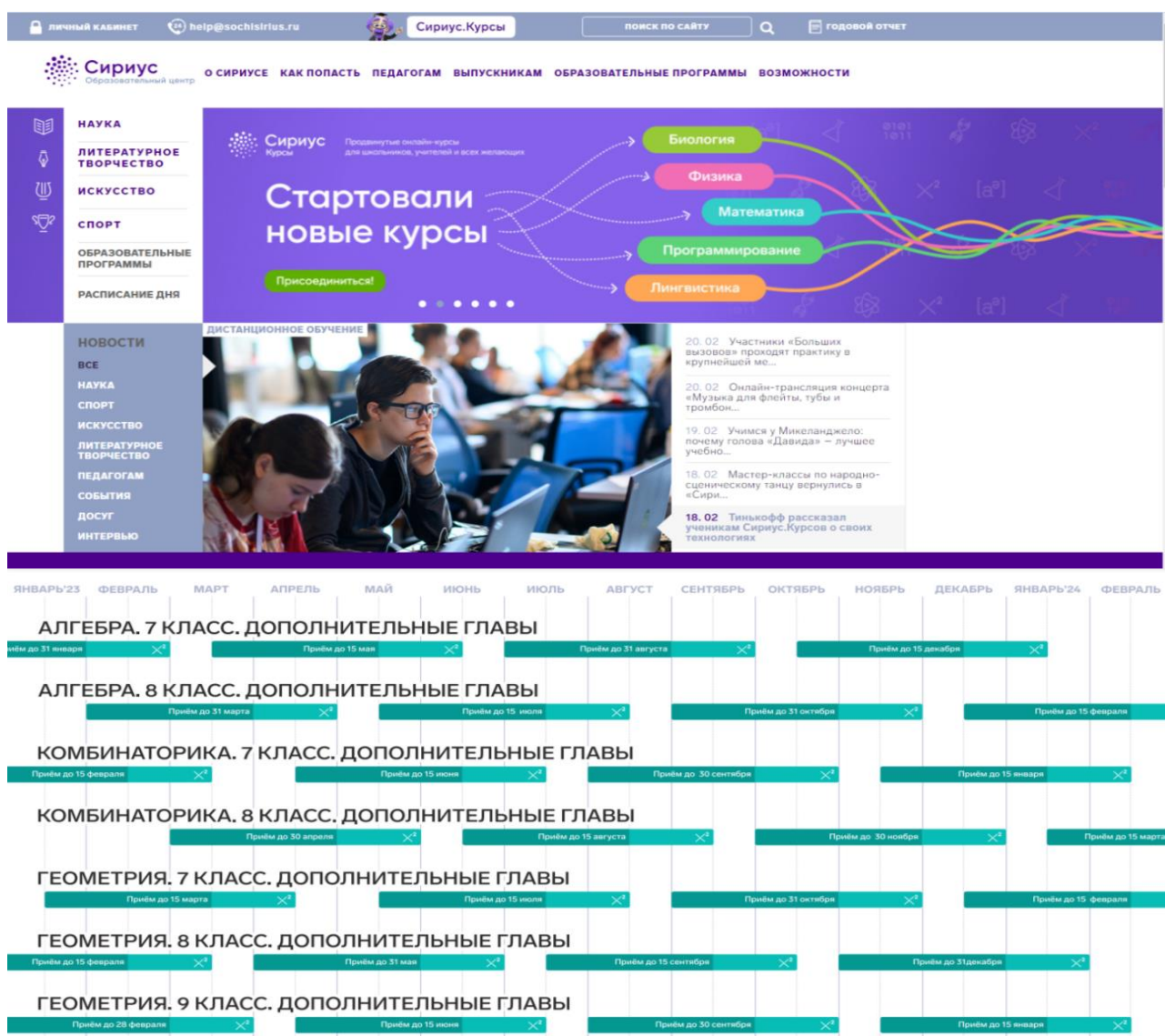


Рис. 7

«Российская электронная школа» – федеральный общедоступный бесплатный ресурс. На сайте представлены интерактивные уроки по учебным курсам учебного предмета «Математика» (рис. 8) [20]. Уроки включают видеоролик с лекцией учителя, задачи и упражнения для закрепления полученных знаний и отработки навыков, а также проверочные задания для контроля усвоения материала. В рамках уроков обучающиеся решают математические задачи, выполняют задания по работе с информацией, представленной в разных формах – в таблице, на рисунке, графике. Образовательные ресурсы по математике, представленные в рамках уроков, можно использовать как дополнительный материал при организации деятельности обучающихся в классе или в качестве материала для изучения дома.

Российская электронная школа. – Сайт: <https://resh.edu.ru/>

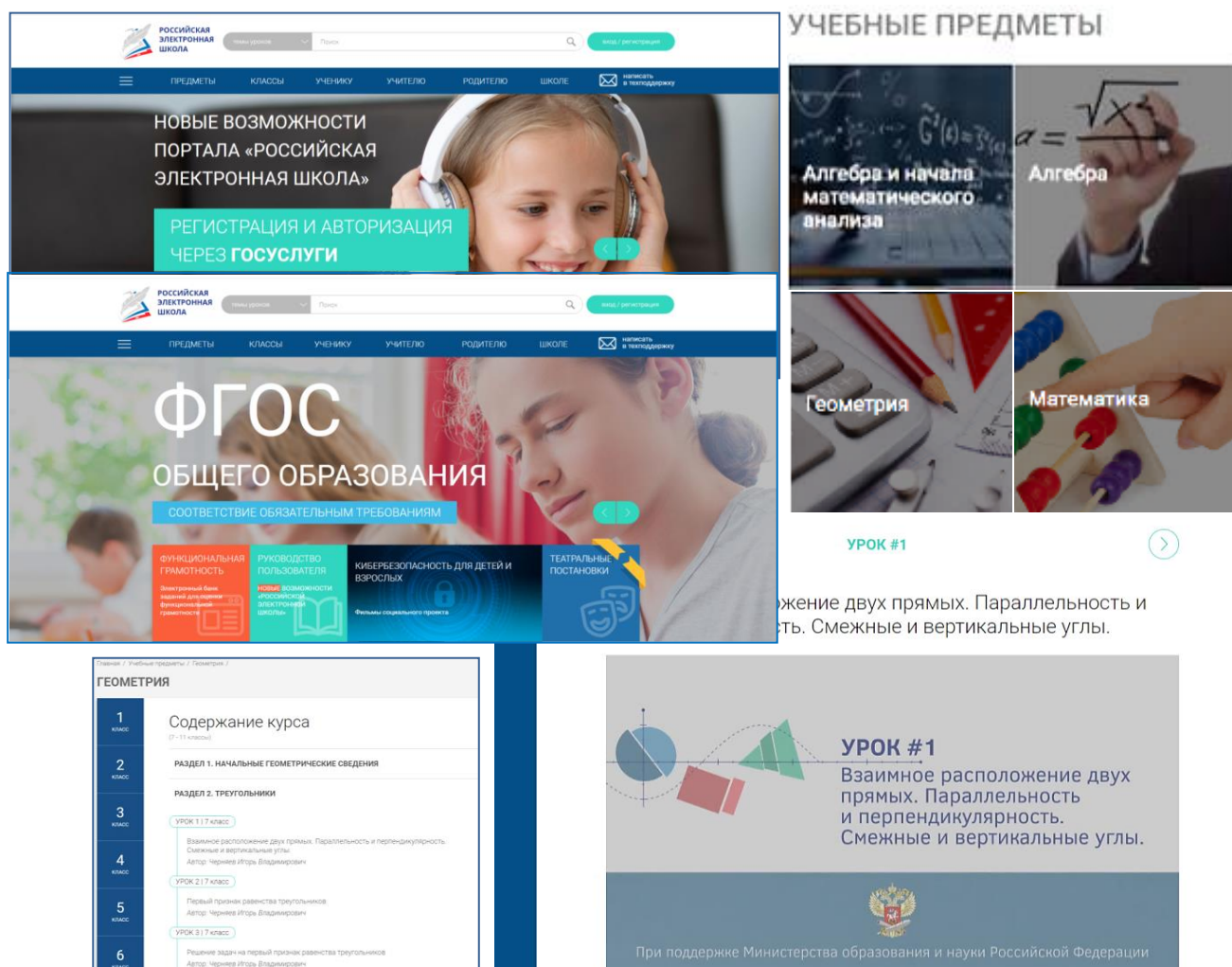


Рис. 8

«01Математика», номинант 2019/2020 учебного года премии ЮНЕСКО от России в области образования, входит в каталог безопасных знаний и сервисов федеральных и региональных образовательных платформ Минпросвещения России (рис. 9) [19].

«01Математика» – обучающая онлайн-платформа, являющаяся персональным репетитором для каждого обучающегося и персональным ассистентом для учителя. Материалы контента ориентированы на классическое обучение математике. Контент включает более 45000 задач, более 3500 видеороликов и генератор задач, а также позволяет организовать подготовку к ЕГЭ профильного и базового уровней и ОГЭ. Отметим одну особенность системы: работать с геометрическими фигурами, например с пирамидой, возможно изменяя их вид вращением, перемещением, что важно для формирования пространственного мышления школьников (рис. 9).

Обучающая онлайн-система по математике «01Математика»

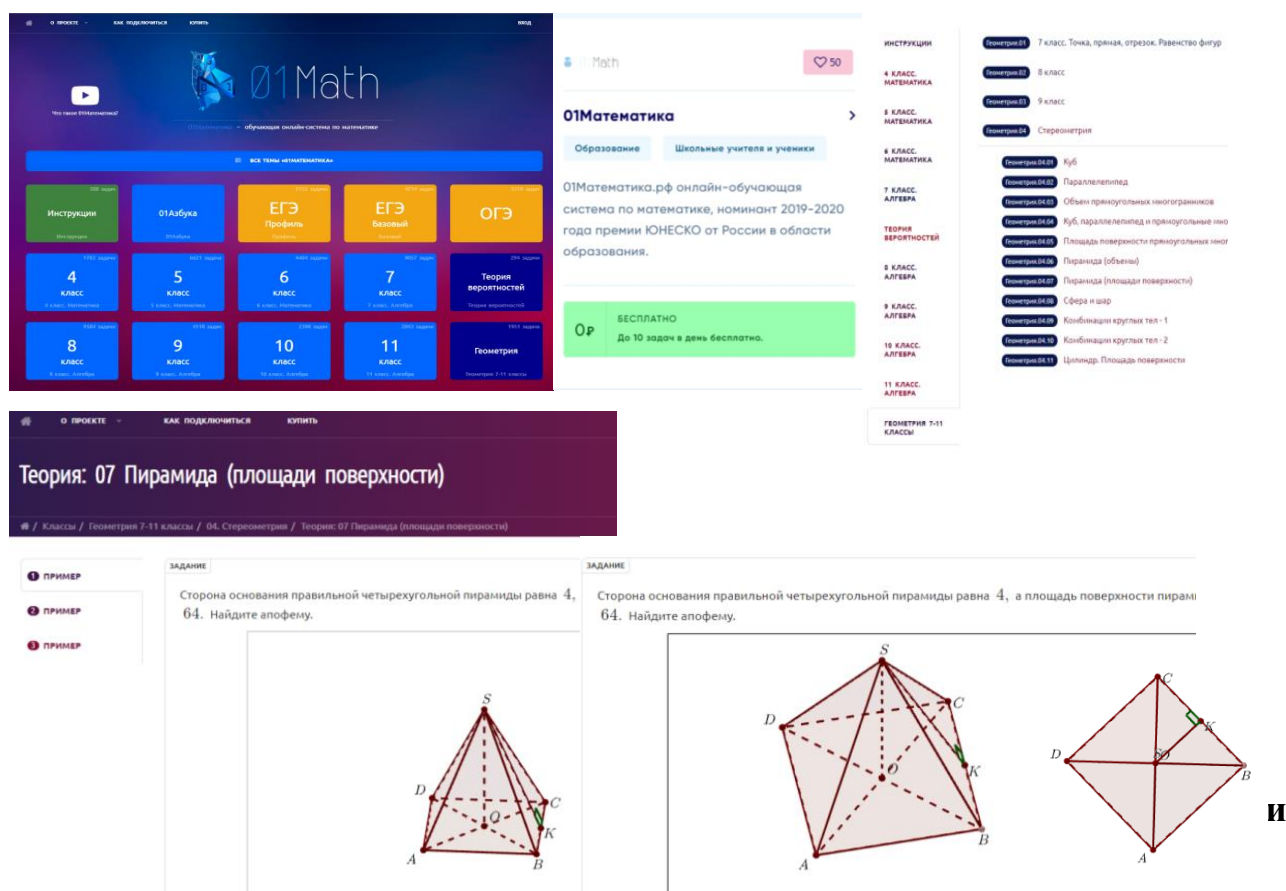


Рис. 9

Виртуальные лаборатории традиционно используются на уроках физики или химии для проведения обучающимся эксперимента, который трудно реализовать на уроке, например, из-за громоздкости оборудования или в связи с техникой безопасности. А. В. Трухин виртуальную лабораторию рассматривает как программно-аппаратный комплекс, ориентируясь на используемые средства: программное обеспечение или лабораторная установка с удаленным доступом [9].

Применение математического моделирования для описания различных процессов в других областях науки и в реальной жизни, ориентировка на подход к понятию виртуальная лаборатория позволяют говорить о возможности организации обучения математике с использованием виртуальной математической лаборатории в цифровой образовательной среде. Такой метод соответствует задаче создания современной и безопасной цифровой образовательной среды, обеспечивающей высокое качество и доступность образования всех видов и уровней» федерального проекта «Цифровая образовательная среда» [29].

Работу в виртуальной математической лаборатории можно организовать с использованием:

- электронных образовательных ресурсов, например лабораторно-практических работ по математике, размещенных на портале «Единое содержание общего образования»;

- математических программ, например, «GeoGebra», «Живая математика» или «Математический конструктор»;

- материалов, размещенных, например, на сайтах «math.ru», «Задачи по геометрии», «Образовательный центр “Сириус”».

Работа в виртуальной математической лаборатории с использованием лабораторно-практических работ или математических программ ориентирована на деятельность обучающихся исследовательского или проектного характера, выполнение эксперимента. При этом целесообразно организовать моделирование опыта, управление им через постепенный переход от достаточно простых заданий к углубленному изучению математического факта или объекта. Использование программ и сервисов обеспечивает учителю математики возможность:

- визуализировать объяснения математической теории чертежами;

- организовать экспериментальную исследовательскую деятельность обучающихся на базовом и углубленном уровнях изучения математики;
- реализовать дифференциацию, учитывающую личностные знания обучающихся на базовом и углубленном уровнях изучения математики;
- индивидуализировать обучение в направлении интеллектуальных и общих умений;
- увеличить долю активной творческой деятельности обучающихся.

Программа «GeoGebra» позволяет моделировать достаточно сложные конструкции, выполнять четкие и грамотные чертежи, исправлять ошибки при необходимости. Использование программ и сервисов для построения графиков, например сервиса онлайн построения графиков <http://yotx.ru> [22], позволяет организовать исследование, направленное на выявление свойств функций при построении большего количества графиков. Учитель при технических возможностях может организовать индивидуальную или парную проектно-исследовательскую деятельность. Если учителем организована работа в классе на одном компьютере, то он может организовать фронтальное обсуждение геометрической модели (конструкции, чертежа, рисунка, графика, композиции геометрических тел), построенной учителем или кем-то из обучающихся, или можно предложить обучающимся выполнить построения, графическое решение задачи в тетради, а затем сверить свои построения с образцом.

Рассмотрим примеры работы обучающихся в виртуальной математической лаборатории. Отметим, что учитель может провести весь урок в форме виртуальной лаборатории или только отдельный этап урока.

Пример 1. Урок «Свойства тригонометрических функций».

Фрагмент технологической карты урока приведен в таблице 6.

Таблица 6

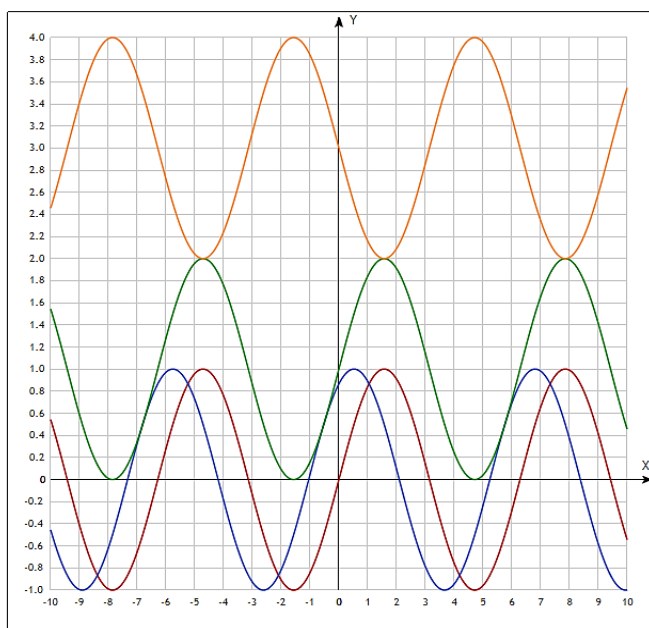
Технологическая карта урока по алгебре и началам математического анализа (фрагмент)

Предмет, класс	Алгебра и начала математического анализа, 11 класс
Программа по предмету	Федеральная рабочая программа среднего общего образования. Математика. Углубленный уровень. Для 10–11 классов

Уровень изучения	Углубленный уровень изучения математики
Тема раздела	Графики тригонометрических функций
Тема урока и номер урока в теме	Тригонометрические функции, их свойства и графики. Номера уроков по УТП 1–4
Тип урока	Урок открытия нового знания; урок построения системы знаний и умений
Цель урока	Сформировать знание свойств тригонометрических функций при построении графика функции
Задачи урока	1) Сформировать понимание взаимосвязи параметров с изменением вида и расположения графика тригонометрической функции на координатной плоскости. 2) Сформировать знание свойств тригонометрических функций. 3) Развивать умение решать уравнения графическим способом
Метод и форма проведения	Виртуальная математическая лаборатория. Индивидуальная, парная и групповая работа
Виды деятельности обучающихся	Использовать ЦОР для построения графиков тригонометрических функции и изучения их свойств. Использовать ЦОР для построения графиков тригонометрических функции и исследования их свойств. Решать уравнения графическим способом
ЭОР	Программа «GeoGebra» и сервис онлайн построения графиков http://yotx.ru/ [22]

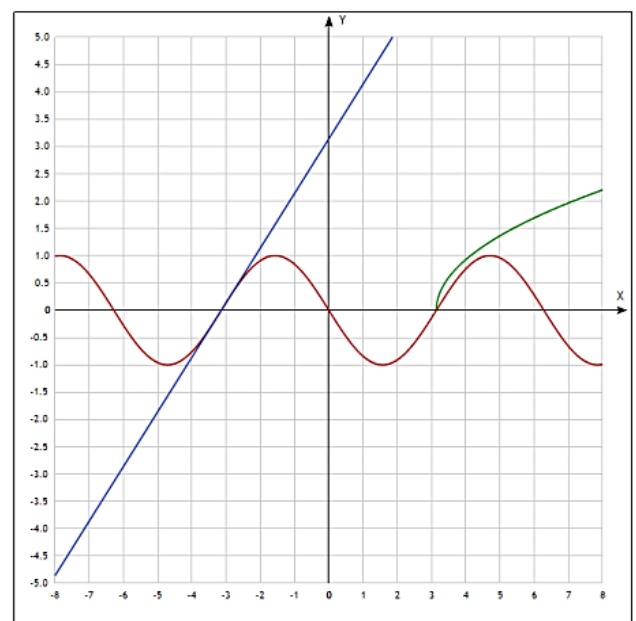
У обучающихся уже сформировано на достаточно высоком уровне знание понятий «функция», «график функции», «область определения и область значений функции». Учитель, опираясь на эти знания, организует в форме виртуальной математической лаборатории исследование новой функции для обучающихся – тригонометрической. На первом этапе исследования учитель предлагает обучающимся построить графики тригонометрических функций, например: $y = \sin x$, $y = \sin x + 1$, $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$, $y = \sin x + 3$ (рис. 10).

Обучающиеся строят графики с использованием цифровых ресурсов, например сервиса онлайн построения графиков <http://yotx.ru/> (рис. 10а). Затем учитель организует деятельность в направлении самостоятельного выявления свойств функции. Обучающиеся сравнивают и анализируют графики, читают графики и составляют список свойств конкретной функции.



- $y(x) = \sin(x)$ [Показать таблицу точек](#)
- $y(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ [Показать таблицу точек](#)
- $y(x) = \sin(x) + 1$ [Показать таблицу точек](#)
- $y(x) = -\sin(x) + 3$ [Показать таблицу точек](#)

а)



- $y(x) = -\sin(x)$ [Показать таблицу точек](#)
- $y(x) = x + \pi$ [Показать таблицу точек](#)
- $y(x) = \sqrt[3]{x - \pi}$ [Показать таблицу точек](#)

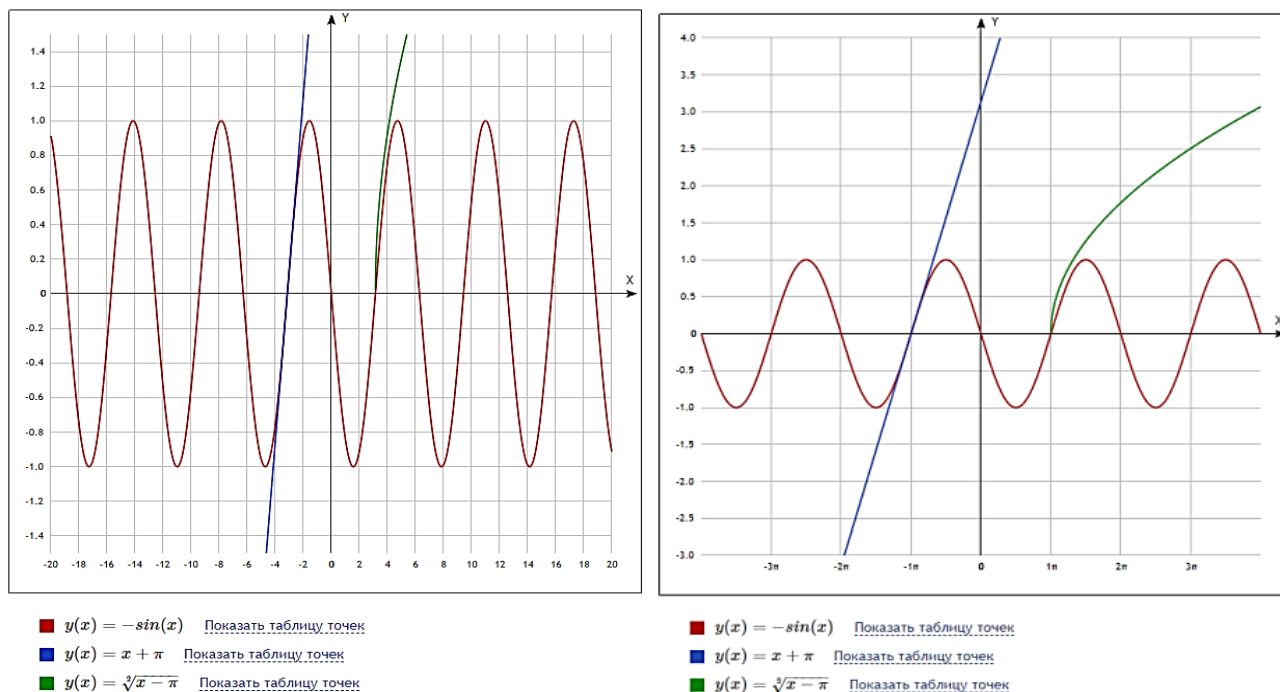
б)

Рис. 10

На втором этапе учитель организует решение уравнений повышенного уровня сложности аналогичных уравнениям

$$-\sin x = x + \pi; \quad -\sin x - \sqrt{x - \pi} = 0.$$

Обучающиеся выдвигают гипотезу, что уравнения можно решить графическим способом и решают их с использованием цифровых ресурсов (рис. 10б, рис. 11). При этом обучающиеся самостоятельно выбирают единичный отрезок по осям Ox и Oy .



После завершения ^{а)} решения уравнений целесообразно ^{б)} организовать не только оценивание верности полученных значений переменной, но и выявление причин затруднений построения графика и получения верного ответа, а также фронтальное обсуждение полученных графиков.

Рис. 11

Критериями оценивания графиков могут быть:

- 1) единицы измерения координат по осям, например на рисунках 10б и 11а на оси Ox координаты представлены целыми числами, а на рисунке 11б – целые числа выражены через π ;
- 2) масштаб, удобный для построения и чтения графика;
- 3) точность построения графиков.

Такой подход к организации деятельности обучающихся в виртуальной математической лаборатории позволяет учителю организовать работу в направлении формирования культуры построения графиков функций, понимания необходимости верного задания системы координат, осознанного применения графиков для представления различной информации.

Пример 2. Урок «Теорема о трех перпендикулярах».

Фрагмент технологической карты приведен в таблице 7.

Таблица 7

Технологическая карта урока по геометрии (фрагмент)

Предмет, класс	Геометрия, 10 класс
Программа по предмету	Федеральная рабочая программа среднего общего образования. Математика. Углубленный уровень. Для 10–11 классов
Уровень изучения	Углубленный уровень изучения курсов учебного предмета «Математика»
Тема раздела курса	Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве
Тема урока и номер урока в теме	Теорема о трех перпендикулярах. Номера уроков по УТП 1, 2
Тип урока	Урок открытия нового знания
Цель урока	Сформировать умение применения теоремы о трех перпендикулярах при решении геометрических задач
Задачи урока	1) Актуализировать знание теоремы Пифагора и ее применение для решения геометрических задач. 2) Организовать самостоятельное открытие обучающимися теоремы о трех перпендикулярах. 3) Сформировать знание и понимание теоремы о трех перпендикулярах. 4) Сформировать осознанное применение теоремы о трех перпендикулярах при решении задач
Метод и форма проведения	Исследовательская работа. Виртуальная математическая лаборатория. Индивидуальная, парная и групповая работа

Виды деятельности обучающихся	Решать стереометрические задачи, связанные с применением теоремы о трех перпендикулярах, нахождением расстояний, построением проекций. Использовать ЦОР для построения чертежей при решении задач
ЭОР	Программа «GeoGebra»

Учитель организывает исследовательскую деятельность обучающихся при изучении темы «Теорема о трех перпендикулярах».

На *первом этапе* исследования учитель создает проблемную ситуацию, предлагая обучающимся сконструировать задачу на основе текста: «Через вершину A прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C проведена прямая AD , перпендикулярная к плоскости треугольника». Обучающиеся, используя программу «GeoGebra», строят чертеж (рис. 12).

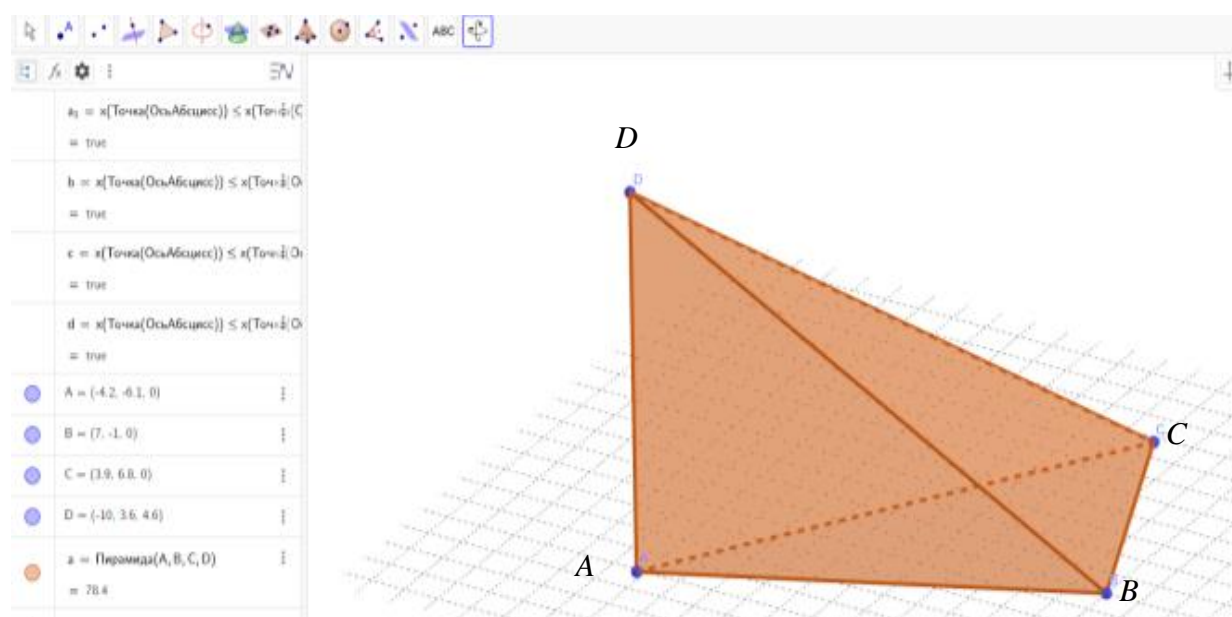


Рис. 12

В результате анализа чертежа выявлено, что геометрической моделью описываемого отношения является пирамида. Дальнейшие свои рассуждения обучающиеся оформляют в виде схемы, отражающей процесс выведения следствий из условий, представленных в тексте (рис. 13).

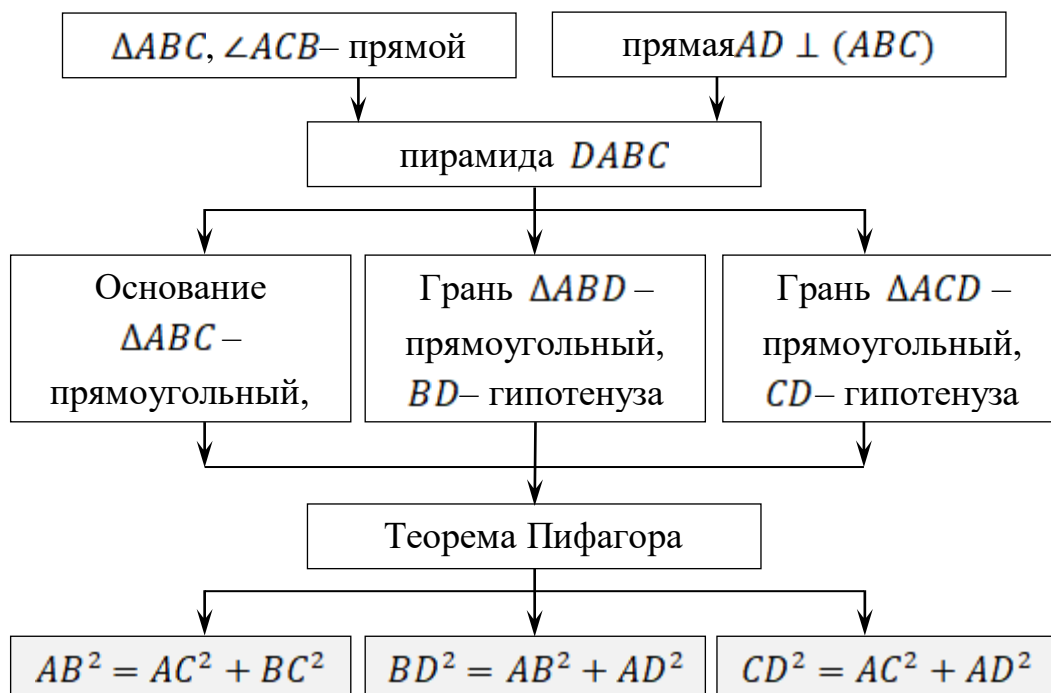


Рис. 13

На *втором этапе* исследования учитель организует проведение эксперимента. Обучающиеся в результате анализа сконструированной схемы выявили, что о грани BCD пирамиды $DABC$ нет информации в тексте, а также в явном виде она отсутствует и в схеме. На основании этого формулируют вопросы: Какие математические отношения существуют между элементами треугольника BCD ? Какие величины можно узнать в треугольнике BCD ?

Затем обучающиеся наблюдают за изменениями пирамиды, а именно ее грани BCD , в процессе вращения (рис. 14) и выдвигают гипотезу, что в треугольнике BCD угол BCD прямой, BD – гипотенуза (рис. 14б).

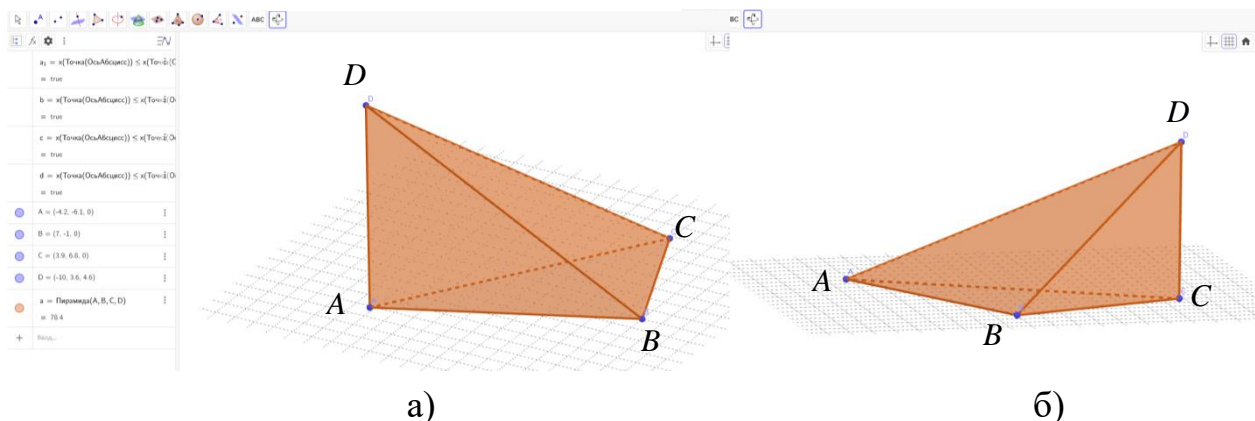


Рис. 14

После этого обучающиеся, используя результаты (выделенные ячейки схемы, рис. 13) выведения следствий из условия, подтверждают выдвинутую гипотезу, а затем составляют геометрическую задачу: «Через вершину A прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C проведена прямая AD , перпендикулярная к плоскости треугольника. Докажите, что треугольник BCD прямоугольный».

На *третьем этапе* исследования учитель акцентирует внимание обучающихся на двух гранях $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$. Под руководством учителя обучающиеся выявляют математические отношения между прямыми DC и AC , BC и AC , а также отношение, полученное на первых двух этапах исследования, между прямыми DC и BC . Обучающиеся интерпретируют и синтезируют полученные математические отношения, обобщают результат и формулируют теорему о трех перпендикулярах.

Таким образом, результатом исследовательской работы с этапом в форме виртуальной математической лаборатории с использованием программы «GeoGebra» является самостоятельное открытие обучающимися теоремы о трех перпендикулярах.

На заключительном этапе исследовательской работы целесообразно предложить обучающимся сравнить решение этой геометрической задачи с использованием теоремы Пифагора и теоремы о трех перпендикулярах и выявить наиболее эстетическое доказательство.

Проведение исследовательской деятельности в форме виртуальной математической лаборатории способствует формированию умений выявления зависимостей, умений интерпретации и оценивания полученных результатов, формированию более осознанного применения знаний при решении задач.

В целом работа в виртуальной математической лаборатории способствует: развитию умения видеть предположительные математические отношения между фигурами и их элементами; формированию умений проведения исследования, развитию интеллектуальных и творческих способностей.

Рассмотрим более подробно использование лабораторно-практических работ в обучении математике, которые являются одним из электронных образовательных ресурсов для организации деятельности обучающихся в виртуальной математической лаборатории.

2.2. Лабораторно-практические работы – электронный образовательный ресурс для работы в виртуальной математической лаборатории

2.2.1. Дидактическая цель системы лабораторно-практических работ

Лабораторно-практические работы в обучении учебному предмету «Математика» стоят на стыке теоретического изучения предмета (лабораторная работа) и применения знаний для решения различных задач (практическая работа). Таким образом, лабораторно-практические работы по математике являются одним из средств, с одной стороны, синтеза теории и практики, с другой, интеграции теории в практическую деятельность, что способствует органичному сочетанию различных компонентов содержания математического образования в единое целое. Такой подход к определению понятия «лабораторно-практические работы» в обучении математике влияет на тематику и содержание лабораторно-практических работ, их поэтапное включение в обучение теме, приемы и методы, используемые учителем для руководства деятельностью обучающихся.

Система интерактивных лабораторно-практических работ (ИЛПР) по учебному предмету «Математика» для 10–11 классов включает десять работ, которые тематически ориентированы на учебные курсы «Алгебра и начала математического анализа» и «Геометрия» [14].

В таблице 8 указаны темы лабораторно-практических работ и распределение по классам, соответствующее федеральной рабочей программе по математике среднего общего образования на углубленном уровне. Распределение по классам носит рекомендательный характер, поэтому учитель, ознакомившись с работой и ориентируясь на цель ее проведения, может проводить их в обоих классах.

Дидактическая цель системы интерактивных лабораторно-практических работ по математике – развитие и совершенствование личностных и метапредметных результатов обучения математике через углубление, расширение и применение предметных знаний и умений.

**Система интерактивных лабораторно-практических работ
по учебному предмету «Математика», 10–11 классы**

<i>№ n/n</i>	<i>Название лабораторно-практической работы и класс изучения темы в соответствии с ПРП по математике</i>	
1.	Решение задач с использованием свойств тригонометрических функций и их графиков	11
2.	Решение задач с использованием свойств показательной функции и ее графика	10
3.	Решение задач с использованием свойств логарифмической функции и ее графика	10
4.	Лабораторная работа «Решение задач с использованием свойств функций с модулем и их графиков»	10–11
5.	Решение задач с использованием свойств «кусочной» функции и ее графика	10–11
6.	Решение задач с использованием графика функции произвольного многочлена	10
7.	Решение математических и прикладных задач с помощью производной	10–11
8.	Решение задач на применение комплексных чисел	11
9.	Решение математических и прикладных задач с применением интегралов	11
10.	Решение задач на нахождение площади сечения многогранников и тел вращения	10–11

Таким образом, структура дидактической цели системы интерактивных лабораторно-практических работ включает личностную, метапредметную и предметную составляющие. Соответственно организация учителем процесса выполнения лабораторно-практических работ должна быть ориентирована не только на приобретение и применение предметных знаний, но и способствовать достижению результатов в личностном развитии обучающихся и формированию метапредметных результатов.

Поэтому учитель, планируя проведение конкретной лабораторно-практической работы и формулируя дидактическую цель и задачи ее проведения, соотносит:

– *личностную* составляющую с возможностью использования содержания ИЛПР в направлении личностного развития обучающихся;

– *метапредметную* составляющую с обеспечением процесса формирования и развития метапредметных результатов обучения теме, в частности, функциональной математической грамотности и познавательных универсальных учебных действий (УУД);

– *предметную* составляющую дидактической цели с изучаемой темой, ее содержанием и местом в изучении темы учебного курса.

Личностная составляющая дидактической цели ИЛПР отражается в формировании и развитии у обучающихся восприятия математики не только как учебного предмета, но и как науки, используемой в сфере человеческой деятельности. Ориентируясь на это, учитель при проведении лабораторно-практической работы организывает деятельность обучающихся в направлении овладения языком математики, формирования математической культуры, готовности осуществления проектной и исследовательской деятельности. Такая деятельность обучающихся может быть организована, например, в форме фронтального обсуждения информации, полученной при просмотре мотивационного видео, с которого начинается каждая лабораторно-практическая работа. При выполнении заданий целесообразно организовать деятельность обучающихся, способствующую изменению шаблонного мышления, обращая внимание обучающихся на проведение исследования.

Ориентируясь на ***метапредметную составляющую дидактической цели ИЛПР*** в направлении формирования и развития регулятивных и коммуникативных УУД, учитель может организовать проведение работы или ее структурных элементов при фронтальной, групповой или индивидуальной работе обучающихся. При фронтальной форме обучающиеся одновременно выполняют задания. В процессе выполнения или после него учитель организует фронтальное обсуждение проблемных моментов или вопросов, возникших у обучающихся, полученных результатов. При групповой или индивидуальной форме работы обучающиеся выполняют задания в соответствии с инструкциями и рекомендациями, входящими в содержание заданий.

В зависимости от *предметной составляющей дидактической цели ИЛПР* при изучении конкретной темы учебного курса организация ее проведения осуществляется на разных этапах изучения темы, а, следовательно, работа может иметь исследовательский или иллюстративный характер. Если работа имеет *исследовательский характер*, то ее выполнение или выполнение ее отдельного структурного элемента включается в образовательный процесс до изучения теоретического материала темы. Обучающимся неизвестны закономерности, свойства, выводы, которые описаны в учебнике. Учитель с помощью элемента ИЛПР создает проблемную ситуацию, мотивирует обучающихся на изучение соответствующего материала, организует открытие обучающимися новых знаний и формирование умений их применения при решении задач. Обучающиеся в процессе проведения исследования, эксперимента приобретают новые знания и умения. Если работа имеет *иллюстративный характер*, то выполнение заданий работы ориентировано на уже известный обучающимся теоретический материал. Учителем на уроках или обучающимися при самостоятельной работе с учебником уже установлены причинно-следственные связи, выявлены закономерности. В этом случае происходит расширение и углубление знаний, развитие и совершенствование умений его применения для решения задач.

Таким образом, дидактическая цель системы интерактивных лабораторно-практических работ позволяет рассматривать их как одно из средств организации учебно-познавательной деятельности обучающихся в направлении достижения планируемых результатов обучения математике.

2.2.2. Планируемые результаты выполнения интерактивных лабораторно-практических работ

Планируемые результаты выполнения интерактивных лабораторно-практических работ базируются на требованиях федеральных государственных образовательных стандартов общего образования к результатам обучения учебному предмету «Математика» [26], учитывают развивающие направления математического образования, отраженные в Концепции развития математического образования в Российской Федерации [24].

Конкретизируем планируемые результаты выполнения ИЛПР в соответствии с дидактической целью, ориентируясь на ее составляющие и базируясь на результатах обучения математике, сформулированных в рабочих программах по математике среднего общего образования на углубленном уровне [27, 28].

Результаты в направлении личностного развития обучающихся, соответствующие личностной составляющей дидактической цели:

- Ценностное отношение к знаниям и умениям, специфичных математике и соответствующих темам лабораторно-практических работ, через осознание возможности их применения в других областях науки, технологий, отраслях экономики.
- Осознание практического применения математических теоретических знаний и практических умений, соответствующих темам лабораторно-практических работ, для решения практико-ориентированных и прикладных задач.
- Осознание использования проектной и исследовательской деятельности как средства получения новых математических знаний.
- Осознание использования проектно-исследовательской деятельности как средства познания мира через выполнение контекстных заданий.

Метапредметные результаты, соответствующие метапредметной составляющей дидактической цели:

Универсальные познавательные действия

Базовые логические действия

- Умение характеризовать существенные признаки математических понятий, связанных с темами ИЛПР, в том числе функций, многогранников и тел вращения, выявлять математические закономерности и свойства понятий, например функций, на основе наблюдений и эксперимента.
- Умение устанавливать справедливость высказываний, формулировать и преобразовывать суждения в процессе сравнения и анализа высказываний и суждений.
- Умение построения логически верной цепочки умозаключений при доказательстве математического факта или в процессе решения задачи.
- Умение формулировать выводы с использованием законов логики, аналогичные умозаключения.

Базовые исследовательские действия

- Умение проводить по плану несложный эксперимент, небольшое исследование по установлению особенностей математического объекта, зависимостей объектов между собой.
- Умение самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведенного исследования.

- Умение выполнения самопроверки, самоконтроля процесса и результата решения математической задачи и контекстной задачи.
- Умение оценивания выполненной деятельности и ее результата поставленной цели через анализ оценивания верности выполненных заданий оценивающим функционалом лабораторной работы.

Работа с информацией

- Умение выявления данных, необходимых для решения задачи или для ответа на вопрос.
- Умение анализировать и интерпретировать информацию в соответствие с поставленной задачей.
- Умение представлять информацию графически.
- Умение оценивать соответствие информации по самостоятельно сформулированным критериям.

Универсальные регулятивные действия

Самоорганизация:

- Умение составлять план и алгоритм решения задачи в процессе сравнения и анализа плана лабораторных работ в целом и предписания для выполнения отдельного эксперимента.
- Умение выбирать путь и способ решения с учетом имеющихся ресурсов.

Самоконтроль:

- Умение выполнять познавательную рефлексию на основе осознания совершенных действий.
- Умение выполнять самопроверку, самоконтроль деятельности и ее результата, в частности решения поставленной задачи.
- Умение оценивать соответствие результата цели и условиям, объяснять причины достижения или недостижения результатов деятельности.

Универсальные коммуникативные действия – *общение и сотрудничество* – базируются на взаимодействии с учителем и одноклассниками в процессе фронтальной или групповой работы.

Предметные результаты, соответствующие предметной составляющей дидактической цели соответствуют теме работы.

Учитель, формулируя дидактическую цель проведения конкретной ИЛПР или ее структурного элемента и планируя организацию деятельности обучающихся, ориентируется на конкретизированные планируемые результаты выполнения ИЛПР.

2.2.3. Общие методические рекомендации по организации работы со структурными блоками интерактивных лабораторно-практических работ

Дидактическая цель системы интерактивных лабораторно-практических работ, как было отмечено выше, позволяет рассматривать их как одно из средств организации учебно-познавательной деятельности обучающихся в направлении достижения планируемых результатов обучения математике.

Дидактическая цель системы интерактивных лабораторно-практических работ по математике – развитие и совершенствование личностных и метапредметных результатов обучения математике через углубление, расширение и применение предметных знаний и умений.

Включение интерактивных лабораторно-практической работы на определенном этапе изучения темы обуславливает ее дидактическую цель и задачи, характер использования всей работы или ее структурных блоков; форму проведения. Представим возможный характер использования лабораторных работ и форму организации деятельности обучающихся через описание работы со структурными блоками интерактивных лабораторно-практических работ.

Структура каждой ИЛПР представлена несколькими блоками: мотивационное видео с интерактивным вопросом; теоретический материал; цель и задачи работы; система из трех интерактивных электронных образовательных модулей (ИЭОМ) взаимосвязанных единой темой и целью ИЛПР; задания для итогового контроля; литература (рис. 15).

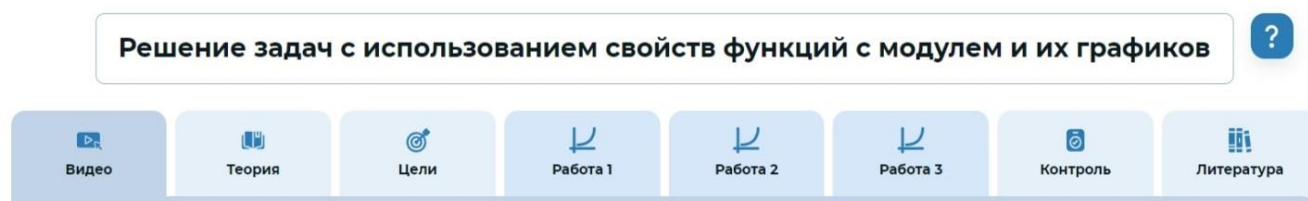


Рис. 15. Структура

Мотивационное видео. В мотивационном видео содержится информация, релевантная теме работы. Например, в видео по теме «Тригонометрические функции» представлены примеры взаимосвязи тригонометрии с другими областями науки, в частности архитектурой, медициной и биологией (рис. 16).

Лабораторная работа «Решение задач с использованием свойств тригонометрических функций и их графиков»

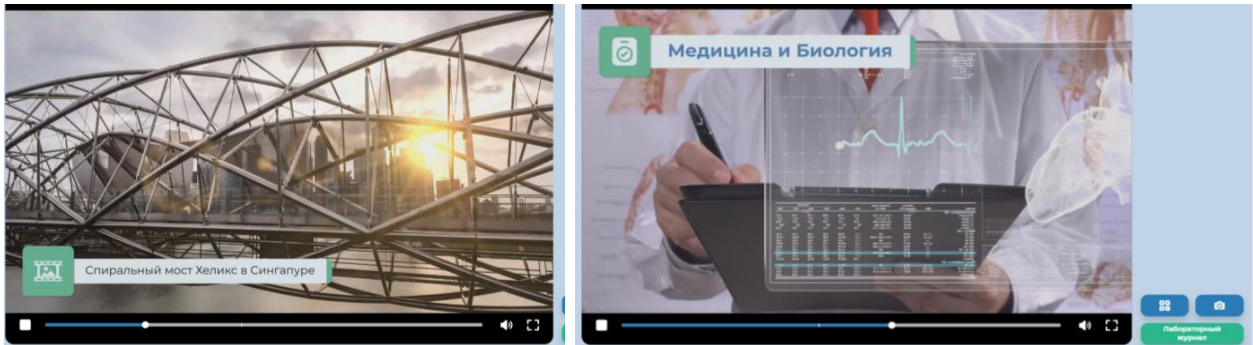


Рис. 16. Пример мотивационного видео

По теме «Кусочные функции» – раскрывается взаимосвязь кусочно заданной функции с повседневной жизнью (рис. 17).

Лабораторная работа «Решение задач с использованием свойств «кусочной» функции и ее графика»



Лабораторная работа «Решение задач с использованием свойств «кусочной» функции и ее графика»

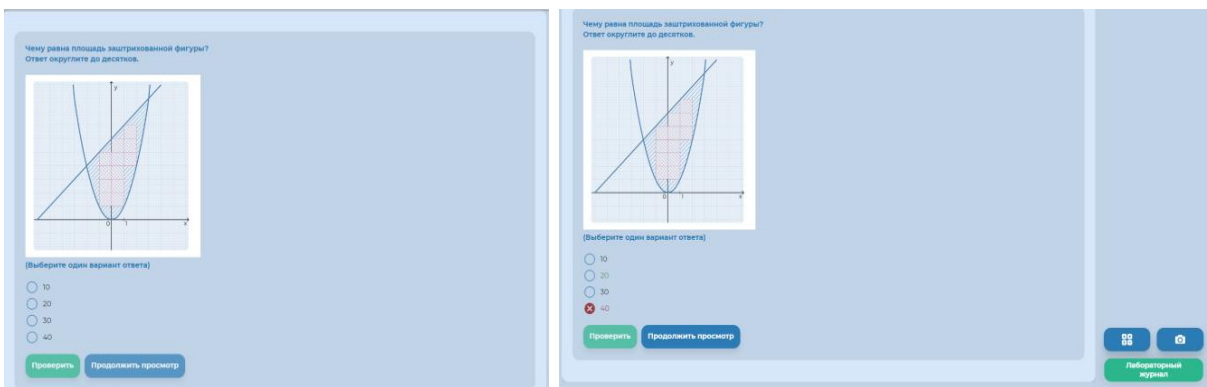


Рис. 18. Пример интерактивного вопроса и оценивания ответа

В рамках мотивационного видео обучающимся предлагается ответить на *интерактивный вопрос*. Верность ответа не оценивается, а комментируется электронной средой: верные ответы подсвечиваются зеленым цветом, а неверные – красным (рис. 18). Такой подход позволяет обучающимся самостоятельно оценить имеющиеся личностные знания по теме ИЛПР.

Работу с мотивационным видео учитель может организовать, используя разные технологии и разные формы работы обучающихся. Например, на этапе начала изучения темы «Тригонометрические функции» учитель организывает просмотр мотивационного видео ИЛПР «Решение задач с использованием свойств тригонометрических функций и их графиков» на уроке открытия новых знаний с целью создания проблемной ситуации. После просмотра видео учитель организывает фронтальное обсуждение полученной информации и осмысление ее личностной значимости для каждого обучающегося. Такой подход позволяет учителю организовать деятельность обучающихся в направлении развития умений поиска выхода из проблемной ситуации, самостоятельного целеполагания и планирования изучения темы и ее результатов.

Другой вариант организации работы с мотивационным видео базируется на использовании технологии «перевернутого класса». Например, на этапе начала изучения темы «Логарифмическая функция» просмотр мотивационного видео ИЛПР «Решение задач с использованием свойств логарифмической функции и ее графика» учитель предлагает обучающимся в качестве домашнего задания, предложив дополнительное задание – поиск информации о проявлении логарифмической функции в живой природе и использовании функции в других областях науки. На следующем занятии учитель организует фронтальное обсуждение информации, содержащейся в видео и найденной при выполнении дополнительного задания.

Интерактивные электронные образовательные модули. Основной частью каждой лабораторно-практической работы является система из трех интерактивных электронных образовательных модулей (ИЭОМ). Все модули, с одной стороны, логически объединены целью лабораторно-практической работы, а с другой, каждый модуль может иметь свою дидактическую цель, а следовательно, может быть использован на разных этапах изучения темы. Задания каждого модуля составляют единое целое с теоретическим и задачным материалом темы, расширяя и углубляя ее содержание.

Учитель, ориентируясь на дидактическую цель лабораторно-практической работы, в зависимости от основной технологии, используемой при обучении теме, от подхода к организации и уровня изучения обучающимися учебного материала темы может организовать выполнение образовательных модулей на разных этапах изучения темы. Кроме этого, интерактивные модули могут быть выполнены как на одном уроке (занятии), так и на нескольких уроках. Это предопределено дидактической целью использования системы ИЭОМ и каждого отдельного модуля. Проиллюстрируем поэтапное использование модулей в обучении разным темам.

Первый этап – начало изучения темы. Например, учитель организывает выполнение *первого модуля* ИЛПР «Решение задач с использованием свойств показательной функции и ее графика», предвосхитив изучение тематического теоретического материала, тем самым создав проблемную ситуацию. Обучающимся из учебного материала 7–9 классов известны этапы и основные приемы построения графиков. Поэтому на первом этапе изучения показательной функции целесообразно организовать ее изучение на основе построения обучающимися графиков различных показательных функций в интерактивной среде ИЛПР. Обучающиеся вычисляют координаты точек и заполняют таблицу (рис. 19)

Лабораторная работа «Решение задач с использованием свойств показательной функции и ее графика»

Лабораторный журнал

Работа 1 - "Исследование общих и различных свойств функций"

Для каждой функции закончите заполнение таблицы (если в таблице не указана форма для обыкновенной дроби, то дробные значения указывать в виде десятичной дроби) для соответствующей функции:

$$y(x) = (3)^x$$

x	2	-1	-0.5	0	0,5	1	2
$y(x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1	$\sqrt{3}$	3	9

Проверить

Ответ неверен!
Вспомните определение функции.
Функция — это соответствие между двумя множествами X и Y , закон, правило, при котором каждому элементу множества X соответствует единственный элемент множества Y .

Рис. 19. Пример таблицы для построения графика функции

При неверном вычислении координат точек (неверные варианты отмечены красным цветом) для построения графиков функции учитель и информационная система ИЛПР рекомендуют повторить теоретический материал. Затем обучающиеся переходят на лабораторную доску, при необходимости корректируя неверно вычисленные координаты точек (в таблице на белом фоне рис. 20), и выполняют построения графиков (рис. 20).

В процессе этой работы происходит актуализация знаний и умений построения графика функции; формируется более осознанное понимание понятий «функция», «степень», компоненты степени.

Затем учитель в процессе фронтальной работы, используя построенные графики (рис. 20), организует актуализацию умений чтения графика функции через совместный поиск ответов на заранее подготовленные учителем вопросы или вопросы, которые есть у обучающихся.

Лабораторная работа «Решение задач с использованием свойств показательной функции и ее графика»

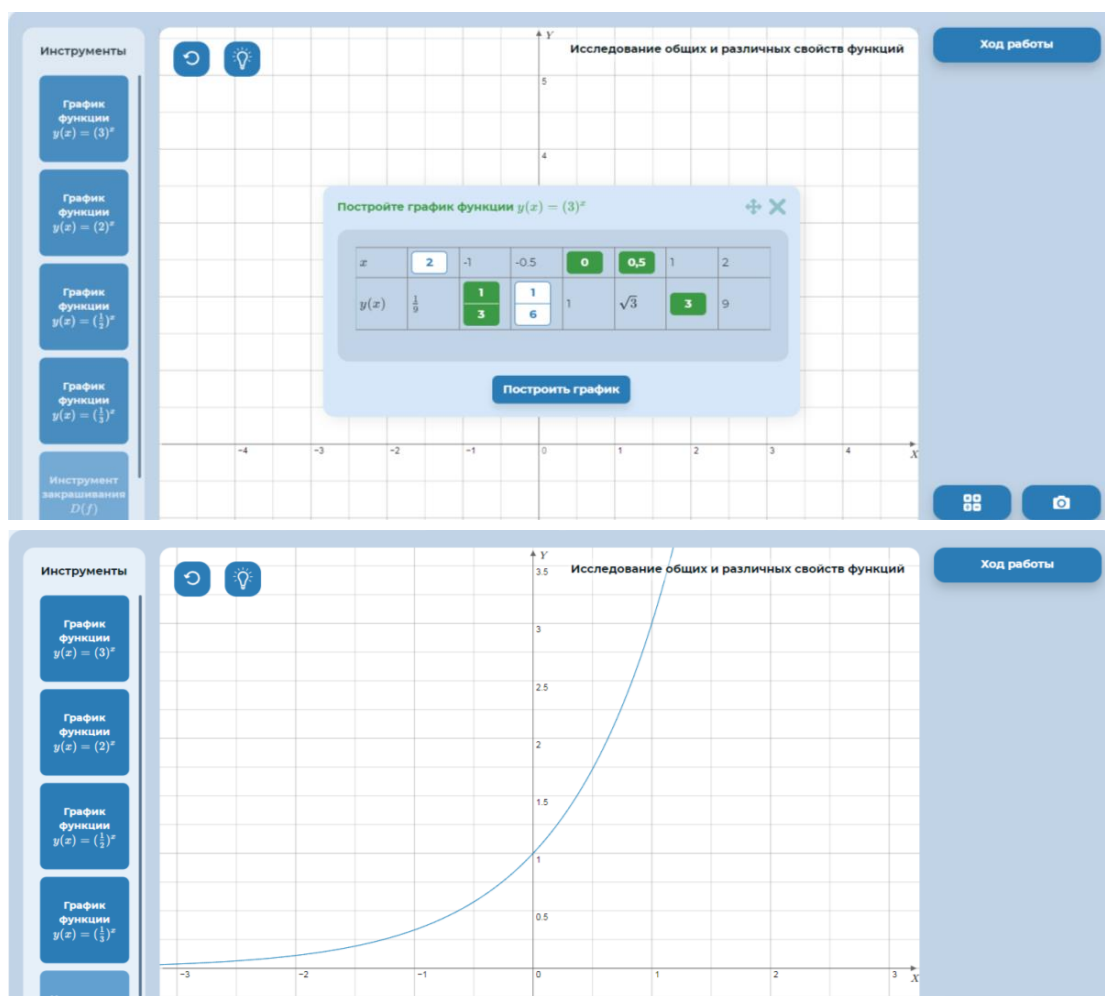


Рис. 20. Пример таблицы для построения графика функции

После актуализации умений чтения графиков, обучающиеся сравнивают и анализируют построенные графики и выявляют свойства показательной функции. Затем учитель организует групповую работу обучающихся с учебником, используемым в обучении, для оценивания верности выявленных свойств функции.

Второй этап изучения темы. На втором этапе изучения конкретной темы после изучения соответствующего теоретического учебного материала целесообразно организовать выполнение **второго модуля**. Такой подход раскрывает перед обучающимися взаимосвязь между теоретическим материалом и практическими заданиями, обеспечивает возможность проведения исследования, базируясь на теоретических знаниях обучающихся.

Например, в содержание второго модуля ИЛПР «Решение задач с использованием свойств логарифмической функции и ее графика» включены задания на исследование характеристических свойств преобразований графиков логарифмических функций, а также задания на решение графическим способом уравнений, ориентированных на изучение математики на углубленном уровне (рис. 21).

Лабораторная работа «Решение задач с использованием свойств логарифмической функции и ее графика»

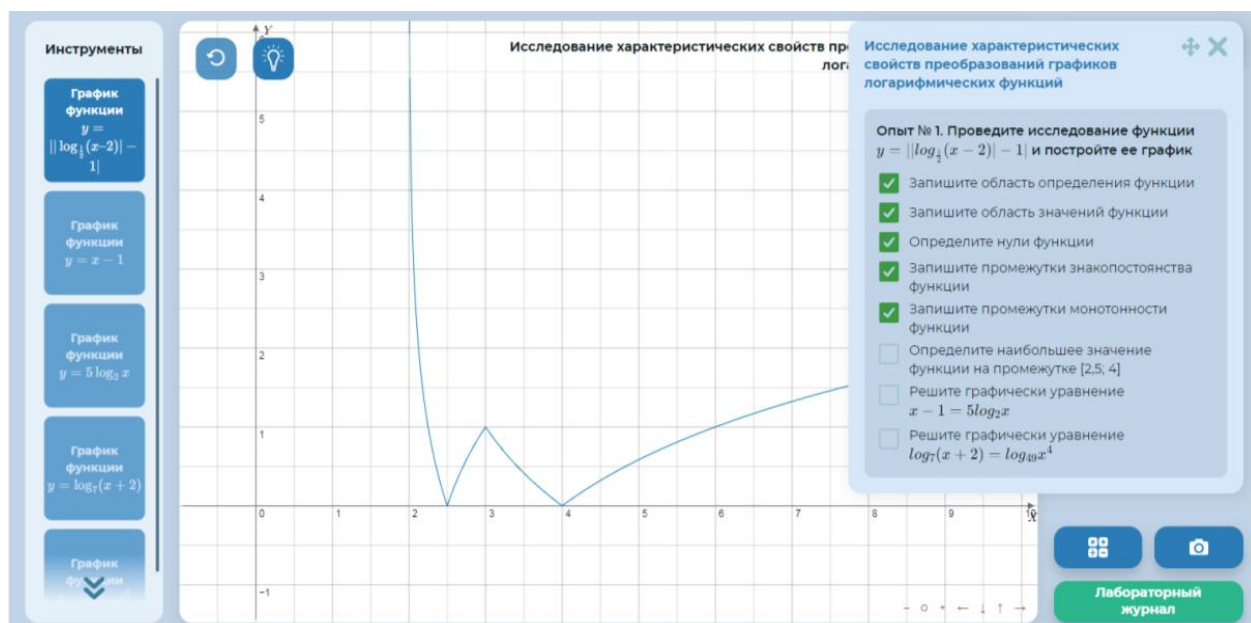


Рис. 21. Пример задания второго модуля

Без сформированных теоретических знаний о функции, ее свойствах невозможно выполнение заданий этого модуля. Поэтому учитель включает этот модуль в образовательный процесс на втором этапе изучения показательной функции. В рамках последующих уроков целесообразно в их содержание включить аналогичные задания, тем самым расширив содержание модуля, чтобы действия анализа функций и решения уравнений в процессе решения развивались и становились умениями решения уравнений повышенного уровня сложности.

Третий этап изучения темы. На заключительном этапе изучения темы учитель организует самоанализ обучающимися выполненной деятельности и ее результатов, процесс выявления причины достижения или недостижения результатов деятельности и дальнейшего изучения темы. В заключительный этап изучения темы учитель может включить проведение **третьего модуля** ИЛПР. В содержание этого модуля ИЛПР включены математические и контекстные задачи, в текстах которых описаны реальные жизненные ситуации, практико-ориентированные и прикладные задачи (рис. 22).



Рис. 22. Пример задачи третьего модуля

Это обеспечивает на последнем этапе изучения темы учителю возможность не только организовать систематизацию и обобщение теоретических знаний, а также раскрыть взаимосвязь математики как науки с реальной жизнью и другими областями науки, например, биологией, химией, физикой. Таким образом, третий модуль при таком подходе к организации его проведения будет являться одним из средств обобщения и систематизации знаний и умений, повышения мотивации к изучению математики.

Контрольный тест. Завершается каждая лабораторно-практическая работа контрольным тестом, включающим десять заданий, соответствующих изучаемой теме и ИЛПР. Задания направлены на выполнение разных действий, например, вычисление числовых данных и их запись; сравнение предложенных вариантов ответов на вопрос и выбор верного из выпадающего списка вариантов ответов; анализ действий, соответствующих заданию и восстановление последовательности их выполнения; сопоставление математических объектов и их свойств (рис. 23).

Лабораторная работа «Решение математических и прикладных задач с применением интегралов»

Сопоставьте свойства определенного интеграла и интегралы, в решении которых они используются.

$$\int_2^6 (3x^5 + 4x^2 - 5)dx =$$

$$\int_2^6 3x^5 dx + \int_2^6 4x^2 dx -$$

$$\int_2^6 5dx$$

Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла.

$$\int_8^8 \frac{1}{3}x^3 dx = 0$$

Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от функции.

$$\int_{-4}^2 (3x^5 + 4x^2 - 5)dx =$$

$$\int_2^0 (3x^5 + 4x^2 - 5)dx +$$

$$\int_{-4}^0 (3x^5 + 4x^2 - 5)dx$$

Определенный интеграл с одинаковыми границами интегрирования равен нулю.

Вычислите $\int_{\frac{\pi}{24}}^{\frac{\pi}{12}} (\sqrt{7} + x^e - \sqrt{x})dx \cdot \int_1^1 (x + \sqrt{x})dx$

(Введите ответ)

Ответ:

Рис. 23. Примеры заданий контрольного теста

Тест ИЛПР по геометрии расширен заданиями, в которых надо, анализируя рисунки, выявить правильную последовательность действий при построении

сечений, выбрать вариант рисунка, на котором верно построено сечение многогранника или тела вращения (рис. 24).

Лабораторная работа «Решение задач на нахождение площади сечения многогранников и тел вращения»

Контрольный вопрос:

Выберите рисунок, где правильно построено сечение, проходящее через точки М, К, Р, если известно, что одно из построений точно верно?

(Выберите один вариант ответа)

1

2

3

4

Рис. 24. Пример задания контрольного теста

Учитель может организовать выполнение обучающимися теста, с одной стороны, как заключительной части лабораторной работы, с другой, при завершении изучения темы. Выполнение теста проводится при индивидуальной или парной формах работы. Если выполнение теста происходило индивидуально, то учитель акцентирует внимание каждого обучающегося на личностных достижениях и возможных причинах затруднений при ответе на вопросы теста. Если выполнение теста было организовано в парах, то происходит расширение акцента индивидуальной работы в направлении выполнения действий взаимопомощи и самооценки.

Оценивающий функционал ИЛПР автоматически оценивает верность ответа, отмечая верные ответы зеленым цветом, а неверные – красным; при неверном ответе система ИЛПР дает комментарий к ответу и рекомендует повторить материал темы, направляя обучающихся к теоретическому блоку ИЛПР. Выполнение теста фиксируется в лабораторном журнале (рис. 25).

Лабораторная работа «Решение математических и прикладных задач с применением интегралов»

Контрольный вопрос:

Вычислите $\int_1^{\sqrt{8}} (x - e^x)dx + \int_1^{\sqrt{8}} (3e^x - 2x)dx + \int_1^{\sqrt{8}} (x - 2e^x)dx$

(Введите ответ)

Ответ:

Контрольный вопрос:

Вычислите объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y = 0$ вокруг оси Ox , в ответе укажите несократимые значения дроби. Для ввода дроби используйте математическую клавиатуру.

(Введите ответ)

Ответ: /

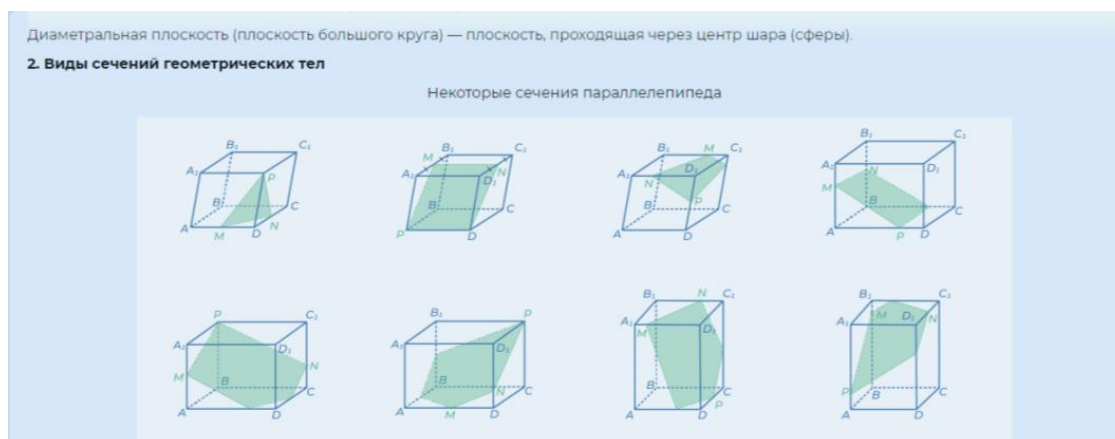
Рис. 25. Примеры оценивания заданий контрольного теста

Используя результаты теста, учитель организует фронтальную работу по подведению общих итогов выполнения работы ИЛПР; обсуждение и оценивание результатов работы всех или отдельных обучающихся. На основании этого даются рекомендации в направлении самостоятельного изучения темы, углубленного изучения темы или устранения пробелов в системе знаний. При таком подходе к организации выполнения теста и подведения итогов ИЛПР у обучающихся формируются и развиваются умения самооценивания выполненной деятельности и ее результатов, планирования дальнейшего изучения темы.

Теоретический блок. В структуру каждой работы включен теоретический блок, отражающий основные теоретические сведения изучаемой темы, соответствующие конкретной лабораторно-практической работе. Например, в теоретический блок ИЛПР «Решение задач на нахождение площади сечения

многогранников и тел вращения» включен материал, отражающий виды сечений геометрических тел, в частности параллелепипеда; методы построения сечений многогранников (рис. 26).

Лабораторная работа «Решение задач на нахождение площади сечения многогранников и тел вращения»



2) Метод внутреннего проецирования

Метод внутреннего проецирования является в достаточной мере универсальным. В тех случаях, когда нужный след (или следы) секущей плоскости оказывается за пределами чертежа, например, когда плоскость сечения почти параллельна основаниям, этот метод имеет определенные преимущества. Вместе с тем следует иметь в виду, что рисунок, выполняемый при использовании этого метода, зачастую получается перегруженным.

Пример. Построить сечение пятиугольной призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$, проходящее через точки F, G, H .

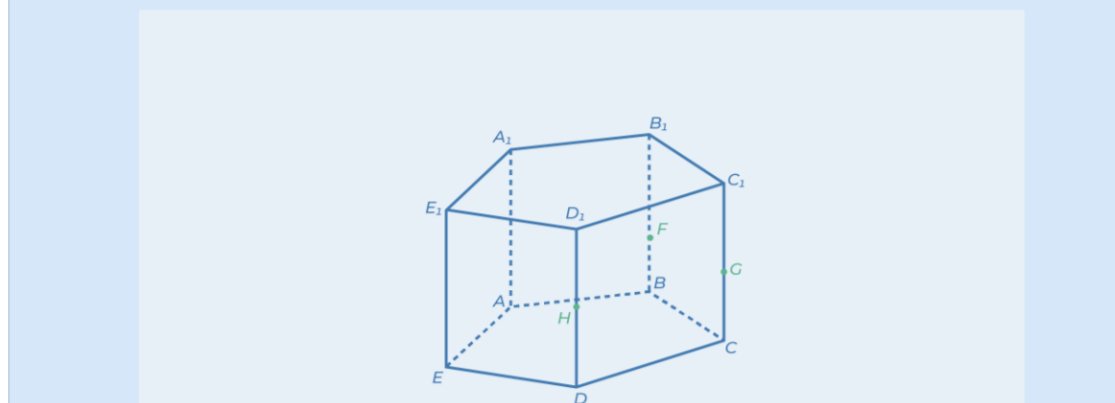


Рис. 26. Пример теоретического блока

Материалы теоретического блока обучающиеся могут использовать для актуализации знаний, выявления причин затруднений при выполнении заданий, в процессе самооценивания своих знаний.

Лабораторный журнал. Выполнение заданий лабораторно-практических работ фиксируется интерактивной средой ЛПР в лабораторном журнале, который является своеобразным отчетом обучающихся о выполненной деятельности (рис. 27).

Лабораторная работа – Решение математических и прикладных задач с помощью производной

ФИО ученика:

Работа 3 - «Решение математических и прикладных задач с помощью производной»

Шаг 1.1. Условие постоянства функции

При исследовании монотонности функции было выявлено:

– если на некотором промежутке производная функции больше 0, то функция

возрастает ✓

– если на некотором промежутке производная функции меньше ✓ 0, то функция убывает

Ответ верен!

А если производная функции на промежутке равна нулю?

Выберите все верные утверждения для такой функции:

- такая функция не существует
- функция на промежутке не возрастает и не убывает
- функция на промежутке одновременно возрастает и убывает
- это постоянная на промежутке функция

Ответ неверен!

Используйте условия монотонности функции.

Рис. 27. Лабораторный журнал

Обучающийся может внести данные о фамилии, дате выполнения работы, что отражает индивидуализированный характер лабораторных журналов. Поэтому учитель может предложить обучающимся в качестве домашнего задания поработать с лабораторным журналом и самостоятельно выявить причины затруднений выполнения заданий, оценить качество выполнения заданий, затем на уроке организовать обсуждение результатов.

Литература. Каждая лабораторно-практическая работа имеет блок «Литература». В этот блок включены источники, в том числе и электронные ресурсы, материал которых расширяет и углубляет учебный материал

по изучаемой теме. Например, в список литературы ИЛПР «Решение задач с использованием свойств тригонометрических функций и их графиков» включены пособия, в которых приведены примеры отражения и применения функций в природе, содержатся задачи с практическим применением (рис. 28). Учитель может использовать эти источники при подготовке к проведению ИЛПР, а обучающиеся для более глубокого изучения материала и при подготовке к зачету на заключительном этапе изучения темы.

Лабораторная работа «Решение задач с использованием свойств тригонометрических функций и их графиков»

Список литературы:

1. Виленкин Н.Я. Функции в природе и технике: кн. для внеклассного чтения IX–X кл. — М.: Просвещение, 1985. — С. 148–165.
2. Доморяд А.П. Математические игры и развлечения. — М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1961. — С. 148–169.
3. Кожуров П.Я. Курс тригонометрии для техникумов. — М.: Гос. изд. технико-теоретической лит., 1956.
4. Колосов А.А. Кн. для внеклассного чтения по математике в старших классах. — М.: Гос. учебно-пед. изд. Мин. Просв. РФ, 1963. — 407 с.
5. Муравин Г.К., Тараканова О.В. Элементы тригонометрии. 10 кл. — М.: Дрофа, 2001. — 128 с.
6. Пичурин Л.Ф. О тригонометрии и не только о ней: пособие для учащихся 9–11 кл. — М.: Просвещение, 1996. — 80 с.
7. Шапиро И.М. Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики: кн. для учителя. — М.: Просвещение, 1990. — 96 с.

Рис. 28. Блок «Литература» (фрагмент)

С методическими рекомендациями по организации проведения ИЛПР подробнее можно познакомиться в методическом пособии «Интерактивные лабораторно-практические работы» [30].

2.3. Особенности преподавания учебного курса «Вероятность и статистика»

Обновленными ФГОС ООО и СОО в учебные планы общеобразовательных организаций в рамках учебного предмета «Математика» вводится новый учебный курс «Вероятность и статистика», который преподается в 7–9 и в 10–11 классах на базовом и на углубленном уровнях. Его можно считать единым курсом, в содержании которого выделено ядро, расширяющееся при переходе из основной школы в среднюю и углубляющееся при изучении на углубленном уровне.

Курс не является полностью новым, поскольку он построен на платформе вероятностно-статистической линии содержания математического образования, вошедшего в российскую школу в 2004 г. и закрепленного в ней федеральными государственными образовательными стандартами. Можно считать, что

содержание нового курса – это выделенная в отдельное преподавание вероятностно-статистическая линия курса алгебры основной школы и курса алгебры и начал анализа средней школы с добавлением содержания, связанного с графами и элементами логики и теории множеств, а также представлением на базовом и на углубленном уровнях. Более того, элементы теории вероятностей и статистики уже более 10 лет являются элементами проверки математической подготовки обучающихся, осуществляемой в рамках ГИА, и включаются в контрольно-измерительные материалы ОГЭ и ЕГЭ.

Цель курса «Вероятность и статистика» – показать обучающимся, как и какими математическими понятиями и простейшими моделями описывается окружающий нас изменчивый мир. Поэтому наибольшую ценность в курсе представляют вводимые понятия, сложившаяся система взглядов и их связь с окружающим миром.

Важнейшей особенностью курса является то, что развитие вероятностно-статистических представлений обучающихся осуществляется концентрически. Отметим, что концентры отличает незначительное наращивание содержания и усложнение решаемых задач. Существенными и отчасти новаторскими являются дидактические подходы к преподаванию статистики и теории вероятностей в школе, которые были положены в основу при разработке федеральной рабочей программы:

1. Формирование целостного представления о теории вероятностей и статистике и их взаимосвязи как разделов математики.

2. Формирование понимания тесной связи понятий теории вероятностей и статистики с окружающим миром, формирование вероятностно-статистической компоненты математической функциональной грамотности.

3. Приоритет содержательного перед формальным, использование формализма.

4. Приоритет примеров из жизни современного общества перед классическими, историческими примерами и задачами, утратившими актуальность, в том числе задачами, родившимися из азартных игр.

5. Акцент на мотивационную составляющую изучения курса, базирующийся на яркости рассматриваемых задач, их актуальности и доступности.

На первых этапах введения обновленных ФГОС при переходе обучающихся из основной школы в среднюю школу возможно возникновение определенных трудностей, причины которых кроются в различии программ, по которым осуществлялось обучение в 7–9 классах, в частности, на базовом или на углубленном уровне, в особенностях УМК и пр. Однако концентрическое построение курса и названные выше единые подходы к его преподаванию позволят снять возможные проблемы, в том числе трудности первого года обучения в средней школе.

Прежде всего напомним требования к подготовке выпускника основной школы в части, относящейся к вероятностно-статистической линии, на соответствие которым выпускники основной школы проходят государственную итоговую аттестацию:

«8) овладение простейшими способами представления и анализа статистических данных; формирование представлений о статистических закономерностях в реальном мире и о различных способах их изучения, о простейших вероятностных моделях; развитие умений извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, описывать и анализировать массивы числовых данных с помощью подходящих статистических характеристик, использовать понимание вероятностных свойств окружающих явлений при принятии решений:

формирование представления о статистических характеристиках, вероятности случайного события;

решение простейших комбинаторных задач;

определение основных статистических характеристик числовых наборов;

оценивание и вычисление вероятности события в простейших случаях;

наличие представления о роли практически достоверных и маловероятных событий, о роли закона больших чисел в массовых явлениях;

умение сравнивать основные статистические характеристики, полученные в процессе решения прикладной задачи, изучения реального явления» (приказ Минобрнауки России от 17 декабря 2010 г. № 1897 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования», в ред. приказов Минобрнауки России от 29.12.2014 № 1644, от 31.12.2015 № 1577, приказа Минпросвещения России от 11.12.2020 № 712) (п. 11.5 «Математика и информатика»).

Соответствие данным требованиям позволит обучающимся приступить к изучению курса вероятности и статистики в 10 классе, причем как на базовом, так и на углубленном уровнях. Однако для успешного и качественного освоения курса, возможно, потребуется проведение некоторой коррекционной работы со стороны учителя.

Прежде всего учителю необходимо выявить возможные дефициты в подготовке обучающихся по отдельным темам курса. В таблице ниже нами дано сопоставление основных элементов содержания курса 10 класса и курсов 7–9 классов, отвечающих федеральным рабочим программам.

Таблица 9

**Соответствие содержания программ учебного курса для 10 классов
и учебных курсов для основной школы**

<i>Содержание курса 10 класса</i>	<i>Соответствующие классы основной школы</i>
Граф, связный граф, пути в графе: циклы и цепи Степень (валентность) вершины. Графы на плоскости	7
Деревья	8
Случайные эксперименты (опыты) и случайные события. Элементарные события (исходы). Вероятность случайного события. Близость частоты и вероятности событий	7
Случайные опыты с равновероятными элементарными событиями	8
Операции над событиями: пересечение, объединение, противоположные события. Диаграммы Эйлера. Формула сложения вероятностей	8
Условная вероятность. Умножение вероятностей. Дерево случайного эксперимента. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Независимые события	8
Бинарный случайный опыт (испытание), успех и неудача. Независимые испытания. Серия независимых испытаний до первого успеха. Серия независимых испытаний Бернулли. Случайный выбор из конечной совокупности	9

<i>Содержание курса 10 класса</i>	<i>Соответствующие классы основной школы</i>
Перестановки и факториал. Число сочетаний. Треугольник Паскаля. Формула бинома Ньютона	9
Случайная величина. Распределение вероятностей. Диаграмма распределения. Операции над случайными величинами. Бинарная случайная величина. Примеры распределений, в том числе геометрическое и биномиальное	9

Воспользовавшись таблицей, учитель сможет найти соответствующий теоретический и задачный материал в учебниках основной школы и далее организовать, например, компактное и акцентированное тематическое повторение конкретного материала в начале учебного года. Другой возможный вариант: следовать тематическому планированию, рекомендованному федеральной рабочей программой, но при изучении «проблемной» темы «отступить на шаг назад» и начать изучение с материала, отнесенного к 7–9 классам. Это же относится и к задачному материалу: целесообразно на начальном этапе повторения или первичного ознакомления использовать задачи базового курса обязательного уровня (здесь можно ориентироваться и на задания ОГЭ), постепенно наращивая сложность предлагаемых обучающимся задач.

Полезно также использовать и потенциал самостоятельной работы обучающихся при условии, что им будет предоставлена возможность поработать с материалами учебника для основной школы, прежде всего, изучить/повторить теорию забытой или непройденной темы, разобрать примеры решения задач.

Еще одним ресурсом является интеграция с курсом информатики и использование компьютера. Этот вариант может быть особенно востребован учителями математики, которые также являются и учителями информатики. Целесообразно организовывать компьютерные практикумы, например, для вычисления характеристик числовых наборов – среднего, медианы, размаха и дисперсии, где используются реальные, неадаптированные числовые данные. Производить вычисления с неадаптированными числами вручную крайне затруднительно, при этом простейший табличный процессор Excel позволяет

провести все необходимые вычисления, не отвлекаясь на сами вычисления и сохраняя концентрацию на сущности статистических понятий. Данные, которые можно использовать на уроках с применением компьютера, можно найти в Интернете. Помимо практикумов необходимо использовать компьютер для моделирования случайных процессов. Например, с помощью компьютера можно исследовать, каким образом частота сближается с вероятностью при увеличении числа экспериментов, это позволит абстрактное понятие вероятности события подкрепить наглядным содержанием. В планировании учитель может выделить отдельные часы для компьютерных практикумов.

Если по каким-либо причинам ликвидация дефицитов затруднительна в рамках урочной деятельности, учитель может воспользоваться ресурсом внеурочной деятельности, также используя для создания курса внеурочной деятельности учебники и учебные пособия для основной школы или научно-популярную литературу (некоторые издания представлены в соответствующем разделе).

Остановимся на литературе и электронных ресурсах, которыми может воспользоваться учитель для организации преподавания курса «Вероятности и статистика», помимо учебников для 10–11 классов.

Как было отмечено выше, возможно, учителю потребуется материал, изучение которого началось в основной школе. В федеральном перечне учебников для преподавания рекомендуется учебник:

Высоцкий И.Р., Яценко И.В. Математика. Вероятность и статистика: 7–9-е классы: базовый уровень: учебник: в 2 частях / И.Р. Высоцкий, И.В. Яценко ; под ред. И.В. Яценко.– М. : Просвещение, 2023.

Также требуемый материал учитель может найти в УМК по алгебре, входивших в ФПУ до обновления ФГОС, например, этой линии отводится важное место в следующих УМК:

Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобраз. организаций / [Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др.]. – М. : Просвещение, 2017 и последующие годы.

Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобраз. организаций / [Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др.]. – М.: Просвещение, 2017 и последующие годы.

Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобраз. организаций / [Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др.]. – М. : Просвещение, 2017 и последующие годы.

Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобраз. организаций / [Е.А. Бунимович и др.]. – М. : Просвещение, 2017 и последующие годы. – (Сферы).

Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобраз. организаций / [Е.А. Бунимович и др.]. – М. : Просвещение, 2017 и последующие годы. – (Сферы).

Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобраз. организаций / [Е.А. Бунимович и др.]. – М. : Просвещение, 2017 и последующие годы. – (Сферы).

Из ранее изданных пособий, в которых основное содержание курса изложено системно и дано много интересных задач, учитель может воспользоваться следующими:

Тюрин Ю.Н., Макаров А.А., Высоцкий И.Р., Яценко И.В. Теория вероятностей и статистика. Экспериментальное учебное пособие для 10 и 11 классов общеобразовательных учреждений. – М. : МЦНМО, 2015.

Бунимович Е.А., Булычев В.А. Основы статистики и вероятность. 5–11 классы: учебное пособие. – М.: Дрофа, 2008. Электронная версия: [Бунимович Е.А., Булычев В.А. Основы статистики и вероятность, 5—11 классы. — 2008 // Библиотека Mathedu.Ru.](#)

Примеры организации уроков по отдельным темам курса и практических видов деятельности представлены в статьях в журнале «Математика», отражающих опыт учителей. Дадим ссылки на статьи, вышедшие в 2023 г.:

Высоцкий И., Сошитова Н. Теория вероятностей и статистика. Практические работы. Часть 1 // Математика. – 2023. – № 1. – С. 15–20.

Высоцкий И., Сошитова Н. Теория вероятностей и статистика. Практические работы. Часть 2 // Математика. – 2023. – № 2. – С. 32–39.

Высоцкий И. Тема: «Представление данных». Сценарии уроков. Часть 1 // Математика. – 2023. – № 4. – С. 22–29.

Высоцкий И. Тема: «Представление данных». Сценарии уроков. Часть 2 // Математика. – 2023. – № 5. – С. 10–19.

Огромное количество реальных данных для практических работ и материалов для организации урочной и внеурочной деятельности обучающихся учитель может найти на специальном портале, посвященном обучению вероятности и статистике в школе:

Для организации контроля по курсу 10 класса можно воспользоваться учебным пособием:

Высоцкий И.Р. Теория вероятностей. Задачи и контрольные работы. 10 класс. – М. : МЦНМО, 2019.

Если уровень класса высок, в нем есть обучающиеся, участвующие в олимпиадах, то в этом случае будет полезно познакомить их с задачами заочных интернет-олимпиад из пособия:

Высоцкий И.Р., Захаров П.И., Нестерова В.В., Ященко И.В. Теория вероятностей и статистика. Задачи заочных интернет-олимпиад. – М. : МЦНМО, 2011.

Отдельно порекомендуем пособия, в которых можно найти материал по теме «Графы»:

[Гуровиц В.М.](#), [Ховрина В. В.](#) Графы. – М. : МЦНМО, 2017.

Семендяева Н.Л. Федотов М.В. Олимпиадная математика. Задачи по теории графов с решениями и указаниями. 5–7 кл.: Учебно-методическое пособие. – М. : Лаборатория знаний, 2023.

Карпов Д.В. Теория графов. – М. : МЦНМО, 2022.

Завершая раздел, предостережем учителя от ряда ошибок, так или иначе допускаемых на практике преподавания вероятностно-статистической линии учебного предмета «Математика», и дадим несколько советов.

1. Не следует обособлять идеи и методы теории вероятностей от идей и подходов математической статистики: такое обособление обычно приводит к отрыву теории вероятностей от практики и превращению ее в науку формальную, абстрактную, не связанную с жизнью.

2. Не увлекайтесь комбинаторикой и комбинаторными методами: этот раздел математики в значительной степени в курсе подчинен двум другим – теории вероятностей и статистике.

3. Не следует увлекаться классической схемой теории вероятностей: это неоправданно сужает круг рассматриваемых вероятностных задач, отрывает теорию вероятностей от практических приложений и не способствует усвоению собственно вероятностных понятий.

4. Боритесь с математическим формализмом, затрудняющим восприятие даже простых понятий, не нагружайте содержание большим числом

алгебраических преобразований и доказательств, добивайтесь понимания сути понятий.

5. Не увлекайтесь историческими задачами, лежащими у истоков науки, однако в настоящее время потерявшими практическую актуальность (например, задачами, возникшими из интереса к азартным играм).

ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

1. Атанасов П. Т., Атанасов Н. П. Сборник математических задач с практическим содержанием: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1987. – 110 с.
2. Виленкин Н. Я. Функции в природе и технике: Кн. для внеклассного чтения IX–X кл. – М.: Просвещение, 1985. – 165 с. (Мир знаний).
3. Ворончагина О. А., Высоцкий И. Р., Трунин А. А. Ященко И. В. Практико-ориентированные математические задачи как средство развития функциональной грамотности // Педагогические измерения. – № 2. – 2021. – С. 130–140.
4. Деменева Н. В. Комплексные числа. Комплексные числа : сборник задач / Н. В. Деменева; М-во с.-х. РФ, федеральное гос. бюджетное образов. учреждение высшего. образов. «Пермская гос. с.-х. акад. им. акад. Д. Н. Прянишникова». – Пермь: ИПЦ «Прокрость», 2016. – 32 с.
5. Доморяд А. П. Математические игры и развлечения. – М.: Гос. изд. физ-мат. лит., 1961. – 169 с.
6. Карнаухова О. А. Прикладные задачи в математике: учебное пособие / О. А. Карнаухова, В. А. Шершнева, Т. О. Кочеткова. – Сиб. федер. ун-т, Ин-т космич. и информ. технологий. – Красноярск: СФУ, 2020. – 216 с.
7. Пичурин Л. Ф. О тригонометрии и не только о ней: пособие для учащихся 9–11 кл. – М.: Просвещение, 1996. – 80 с.
8. Пойя Д. Как решать задачу: пособие для учителей. – Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1959. – 208 с.
9. Трухин А. В. Об использовании виртуальных лабораторий в образовании / А. В. Трухин // Открытое и дистанционное образование. – 2002. – № 4 (8).
10. Шапиро И. М. Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики. Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1990. – 96 с.

Электронные ресурсы

11. Math.ru – [Электронный ресурс]. – URL: <https://math.ru> (дата обращения: 23.06.2023).

12. Банк заданий для формирования и оценки функциональной грамотности обучающихся основной школы (5–9 классы). – [Электронный ресурс]. – URL: <http://skiv.instrao.ru/bank-zadaniy/> (дата обращения 23.06.2023).
13. Виртуальные лабораторные и практические работы на углубленном уровне основного общего образования. – ФГБНУ «Институт стратегии развития образования». – [Электронный ресурс]. – URL: <https://content.edsoo.ru/lab/> (дата обращения: 23.06.2023).
14. Виртуальные лабораторные и практические работы на углубленном уровне среднего общего образования. – ФГБНУ «Институт стратегии развития образования». – [Электронный ресурс]. – URL: <https://content.edsoo.ru/lab/> (дата обращения: 23.06.2023).
15. Портал «Единое содержание общего образования». – [Электронный ресурс]. – URL: <https://edsoo.ru/> (Дата обращения: 23.06.2023).
16. Информационно-поисковая система «Задачи по геометрии». – [Электронный ресурс]. – URL: <https://zadachi.mccme.ru/2012/local.html> (дата обращения: 23.06.2023).
17. Методические кейсы по математике. – ФГБНУ «Институт стратегии развития образования». – <https://content.edsoo.ru/case/subject/6/> (дата обращения: 23.06.2023).
18. Образовательный центр «Сириус». – [Электронный ресурс]. – URL: <https://sochisirius.ru/> (дата обращения: 23.06.2023).
19. Обучающая онлайн-система по математике «01Математика». – [Электронный ресурс]. – URL: <https://01math.com/> (дата обращения: 23.06.2023).
20. Российская электронная школа. – [Электронный ресурс]. – URL: <https://resh.edu.ru/> (дата обращения: 23.06.2023).
21. Семинары «Методическая поддержка учителей математики при введении и реализации обновленных ФГОС ООО и СОО». – ФГБНУ «ИСПО РАО» – [Электронный ресурс]. – URL: https://edsoo.ru/Metodicheskaya_podderzhka_uchitelej_matematiki_pri_vvedenii_i_realizacii_obnovlennogo_FGOS_OOO.htm (дата обращения: 23.06.2023).
22. Сервис онлайн построения графиков. – [Электронный ресурс]. – URL: <http://yotx.ru/> (дата обращения: 23.06.2023).

Нормативные документы

23. «О стратегии развития информационного общества в Российской Федерации на 2017–2030 годы». Указ Президента Российской Федерации от 09.05.2017 г. № 203. – [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.kremlin.ru/acts/bank/41919> (дата обращения 23.06.2023).
24. Концепция развития математического образования в Российской Федерации. – [Электронный ресурс]. – URL: <https://docs.edu.gov.ru/document/b18bcc453a2a1f7e855416b198e5e276/> (дата обращения: 23.06.2023).
25. Национальная программа «Цифровая экономика Российской Федерации». Утверждена Протоколом заседания президиума Совета при Президенте Российской Федерации по стратегическому развитию и национальным проектам от 4 июня 2019 г. № 7. – [Электронный ресурс]. – URL: https://digital.gov.ru/ru/activity/directions/858/?utm_referrer=https%3a%2f%2fwww.google.com%2f (дата обращения 23.06.2023).
26. Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 12.08.2022 № 732 «О внесении изменений в федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования, утвержденный приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 мая 2012 г. № 413» (Зарегистрирован Минюстом России 12.09.2022 № 70034).
27. Федеральная рабочая программа среднего общего образования предмета «Математика» (базовый уровень). – М., 2023.
28. Федеральная рабочая программа среднего общего образования предмета «Математика» (углубленный уровень). – М., 2023.
29. Федеральный проект «Цифровая образовательная среда» Минпросвещения России. – [Электронный ресурс]. – URL: <https://edu.gov.ru/national-project/projects/cos/> (дата обращения: 23.06.2023).

Методические пособия

30. Алексеева Е. Е. Интерактивные лабораторно-практические работы. Учебный предмет «Математика». Углубленный уровень, 10–11 классы: методические рекомендации для учителей / Е. Е. Алексеева. – М.: ФГБНУ «Институт стратегии развития образования РАО», 2023.

31. Рослова Л. О. Алексеева Е. Е., Буцко Е. В., Карамова И. И. Математика (углубленный уровень). Реализация требований ФГОС основного общего образования: методическое пособие для учителя / Л. О. Рослова, Е. Е. Алексеева, Е. В. Буцко и др.; под ред. Л. О. Рословой. М.: ФГБНУ «Институт стратегии развития образования», 2022. – 143 с. – [Электронный ресурс]. – URL: https://edsoo.ru/Matematika_uglublennij_uroven_Realizaciya_trebovanij_FGOS_osnovnogo_obschego_obrazovaniya_Metodicheskoe_posobie_dlya_uchitelya.htm (дата обращения: 23.06.2023).
32. Рослова Л. О., Алексеева Е. Е., Буцко Е. В. Математика. Реализация требований ФГОС основного общего образования: методическое пособие для учителя / Л. О. Рослова, Е. Е. Алексеева, Е. В. Буцко; под ред. Л. О. Рословой. – М.: ФГБНУ «Институт стратегии развития образования», 2022. – 264 с. – [Электронный ресурс]. – URL: – [https://edsoo.ru/Realizaciya_FGOS_osnovnogo_obschego_obrazovaniya_Uchebnij_predmet_Matematika .htm](https://edsoo.ru/Realizaciya_FGOS_osnovnogo_obschego_obrazovaniya_Uchebnij_predmet_Matematika.htm)(дата обращения: 23.06.2023).

Статьи в журнале «Математика»

33. Александрова А. Уравнение прямой // Математика (МЦНМО). – 2021. – № 10. – С. 15–20.
34. Житомирский М. Комбинаторика // Математика (МЦНМО). – 2022. – № 1.
35. Франк В. Задачи, в которых выгодно применять метод координат // Математика (МЦНМО). – 2022. – № 1.
36. Лейбсон К. Кубическая функция. Решение кубических уравнений // Математика (МЦНМО). – 2022. – № 2.
37. Карачинский Е. Графический способ решения задач с параметрами на плоскости *Оха* // Математика (МЦНМО). – 2022. – № 3.
38. Бибииков П. На уроках алгебры в лицее «ВТОРАЯ ШКОЛА» // Математика (МЦНМО). – 2020. – № 5. – С. 4–12.
39. Бибииков П., Козеренко К., Малахов А. Уроки геометрии в лицее «ВТОРАЯ ШКОЛА» // Математика (МЦНМО). – 2020. – № 6. – С. 4–9.
40. Тарасов В. Аргумент монотонной функции, его частные случаи: теория и задачи // Математика (МЦНМО). – 2022. – № 8, с. 43–49, № 9, с. 37–42, № 10, с. 42–48. – 2023. – № 1, с. 24–50, № 2, с. 48–56, № 4, с. 33–40.

41. Высоцкий И. Задачи с улицы // Математика (МЦНМО). – 2022. – № 6, с. 39–46, № 7, с. 57–60, № 8, с. 50–54, № 9, с. 54–59, № 10, с. 49–54. – 2023. – № 1, с. 54–60, № 2, с. 57–62, № 3, с. 55–58, № 4, с. 54–60.
42. Бегунц А., Панкратьев А. Профильный ЕГЭ: Задания 17 и 18 // Математика (МЦНМО). – 2022. – № 9. – С. 31–36.
43. Быков С., Дегтярев Е. Профильный уровень: задача 17 // Математика (МЦНМО). – 2022. – № 1. – С. 47–52.
44. Прокофьев А. Профильный уровень ЕГЭ. ЗАДАНИЕ 15 // Математика (МЦНМО). – 2022. – № 3. – С. 16–24.
45. Прокофьев А. Профильный уровень ЕГЭ. ЗАДАНИЕ 14 // Математика (МЦНМО). – 2022. – № 4. – С. 43–51.

Научное издание

Л. О. Рослова, Е. Е. Алексеева, Е. В. Буцко

**МАТЕМАТИКА (УГЛУБЛЕННЫЙ УРОВЕНЬ).
РЕАЛИЗАЦИЯ ТРЕБОВАНИЙ ФГОС
СРЕДНЕГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

Методическое пособие для учителя

Под редакцией Л. О. Рословой

101000, г. Москва, ул. Жуковского, д. 16
ФГБНУ «Институт стратегии развития образования»
Тел. +7(495)621–33–74
info@instrao.ru
<https://instrao.ru>

Подготовлено к изданию 08.08.2023.

Формат 60×90 1/8.

Усл. печ. л. 5,75.

ISBN 978-5-6049295-7-5